Государственное профессиональное образовательное учреждение
«Сосногорский технологический техникум»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

С.В. Емельянов

08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий

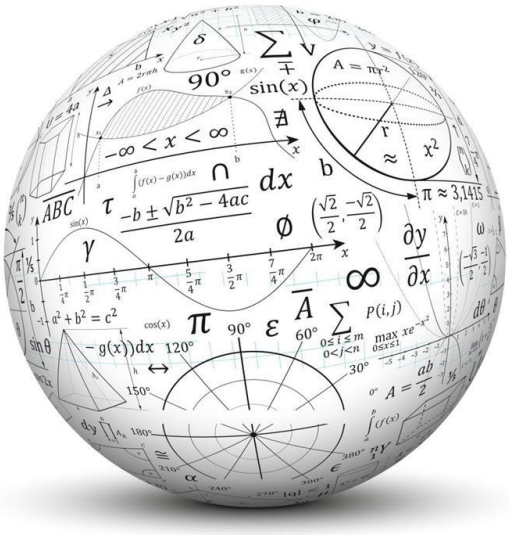
(код специальности и ее наименование)

ЕН.01. МАТЕМАТИКА

(код и наименование учебной дисциплины)

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1, 2

методические указания и контрольные задания
для обучающихся заочной формы обучения



г. Сосногорск

Емельянов С.В.
Математика: Задания на контрольную работу № 1 и № 2 с методическими указаниями для обучающихся заочной формы обучения/С.В. Емельянов.- Сосногорск: ГПОУ «СТТ», 2022- 89 с.

Методические указания предназначены для обучающихся заочной формы обучения по специальности 08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий.

Выполнение данных заданий поможет обучающимся систематизировать полученные знания.

Все контрольные работы основываются на материале, не выходящем за рамки программных требований.

Содержание указаний соответствует учебной программе.

Методические указания рассмотрены на заседании методической комиссии профессионального цикла ГПОУ «Сосногорского технологического техникума». Протокол № 3 от 8 сентября 2022 г.

Рецензент: С.А. Пихтина, заместитель директора по ТО.

ГПОУ «Сосногорский технологический техникум», 2022
169501, Республика Коми, г. Сосногорск, ул. Куратова, д.4
© Емельянов С.В., 2022

СОДЕРЖАНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ……	4
1	МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ……	6
2	КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 1 С МЕТОДИЧЕСКИМИ УКАЗАНИЯМИ……	7
3	КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 2 С МЕТОДИЧЕСКИМИ УКАЗАНИЯМИ……	47
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК……	88
	ПРИЛОЖЕНИЕ……	89
	ПРИЛОЖЕНИЕ А (*Образец заполнения титульного листа домашней контрольной работы*)……..	89

ВВЕДЕНИЕ

Математика – одна из важных фундаментальных наук. В эпоху компьютеризации значительно расширяется область применения теоретической и вычислительной математики.

Учебная дисциплина ЕН.01. Математика входит в математический и общий естественнонаучный учебный цикл.

В настоящее время актуальным становятся требования к личным качествам современного обучающегося – умению самостоятельно пополнять и обновлять знания, вести самостоятельный поиск необходимого материала, быть творческой личностью. Ориентация учебного процесса на саморазвивающуюся личность делает невозможным процесс обучения без учета индивидуально-личностных особенностей обучаемых, предоставления им права выбора путей и способов обучения. Появляется новая цель образовательного процесса – воспитание личности, ориентированной на будущее, способной решать типичные проблемы и задачи исходя из приобретенного учебного опыта и адекватной оценки конкретной ситуации. Решение этих задач требует повышения роли самостоятельной работы обучающихся над учебным материалом, усиления ответственности преподавателя за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста обучающихся, воспитание их творческой активности и инициативы.

Методические указания ставят своей целью оказать помощь обучающимся заочной формы обучения в организации самостоятельной работы по овладению знаний, умений в объеме действующей программы.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен уметь:

- находить производную элементарной функции;
- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять погрешности результатов действия над приближенными числами;
- решать простейшие уравнения и системы уравнений.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен знать:

- основные понятия и методы математического анализа;
- методику расчета с применением комплексных чисел;
- базовые понятия дифференциального и интегрального исчисления;
- структуру дифференциального уравнения;
- способы решения простейших видов уравнений;
- определение приближенного числа и погрешностей.

Учебная дисциплина ЕН.01. Математика способствует формированию следующих **профессиональных и общих компетенций:**

Код	Наименование результата обучения
ПК 2.4.	Участвовать в проектировании силового и осветительного электрооборудования.
ПК 3.3.	Участвовать в проектировании электрических сетей.
ПК 4.2.	Контролировать качество выполнения электромонтажных работ.
ПК 4.3.	Участвовать в расчетах основных технико-экономических показателей.
ОК 1.	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.
ОК 2.	Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.
ОК 3.	Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.
ОК 4.	Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.
ОК 9.	Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

1 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Учебный план учебной дисциплины «Математика» предполагает, помимо посещения обзорных лекций и практических занятий, выполнение двух письменных домашних контрольных работ.

При выполнении работы необходимо соблюдать определенные требования.

Контрольные работы должны выполняться самостоятельно в отдельных тетрадях с оставлением полей для замечаний преподавателя.

Контрольная работа выполняется в обычной ученической тетради в клетку с заполнением титульного листа (Приложение А).

Решение задач контрольной работы следует располагать в порядке номеров, указанных в контрольном задании; перед решением задачи выписывается ее условие. Решения и объяснения следует давать подробно, без сокращения слов, вычисления делать полностью.

Выполнение контрольного задания обучающийся должен представить преподавателю для проверки за две недели до лабораторно-экзаменационной сессии.

Дается общая оценка «зачтено» или «не зачтено». Если работа не зачтена, в нее необходимо внести соответствующие исправления с учетом сделанных замечаний. Повторная проверка работы осуществляется, как правило, тем же преподавателем, который рецензировал ее в первый раз. Обучающиеся, не выполнившие контрольную работу или не получившие зачета по ней, к экзамену не допускаются.

В конце работы должен прилагаться список использованных источников: перечень литературы, фактически используемой при выполнении контрольной работы составляется в алфавитном порядке и оформляется в соответствии с требованиями. При указании литературы, источников необходимо отметить не только авторов, но и издательство, и год выпуска книги.

Номер варианта выбирается сложением двух последних цифр шифра.

Контрольная работа, выполненная не по своему варианту, преподавателем не рецензируется и не зачитывается.

2 КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 1

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Численные методы алгебры

Погрешности приближенных значений чисел

Абсолютная погрешность приближенного значения числа. Граница абсолютной погрешности

Модуль разности между точным числом x и его приближенным значением a, пишут $x \approx a$, называется *абсолютной погрешностью* приближенного значения числа x и обозначается через α, т. е. $|x - a| = \alpha$.

Число a называется *приближенным значением* точного числа x с точностью до Δa, если абсолютная погрешность приближенного значения a не превышает Δa, т. е. $|x - a \leq \alpha$.

Число Δa называется *границей абсолютной погрешности* приближенного числа a. Существует бесконечное множество чисел Δa, удовлетворяющих приведенному определению; поэтому на практике стараются подобрать возможно меньшее и простое по записи число Δa.

По известной границе абсолютной погрешности Δa находят границы, в которых заключено точное значение числа x:

$$(x = a \pm \Delta a) \Leftrightarrow (a - \Delta a \leq x \leq a + \Delta a).$$

Верные цифры числа. Запись приближенного значения числа. Округление приближенных значений чисел

Цифра m приближенного числа a называется *верной в широком смысле*, если граница абсолютной погрешности числа a не превосходит единицы того разряда, в котором записывается цифра m.

Цифра m приближенного числа a называется *верной в строгом смысле*, если граница абсолютной погрешности числа a не превосходит половины того разряда, в котором записана цифра m.

В числах, полученных в результате измерений или вычислений и используемых при расчетах в качестве исходных данных, а также в десятичной записи приближенного значения числа, все цифры должны быть верными.

Наиболее употребительна такая запись приближенного числа (например, в математических таблицах), при которой цифры верны в строгом смысле.

Граница абсолютной погрешности Δa находится непосредственно по записи приближенного значения a числаx.

Цифры в записи приближенного числа, о которых не известно, являются ли они верными, называются *сомнительными.*

Значащими цифрами приближенного числа называются все его верные цифры, кроме нулей, стоящих перед первой цифрой (слева направо), отличной от нуля.

При округлении числа a его заменяют числом a_1 с меньшим количеством значащих цифр. Абсолютная величина разности $|a - a_1|$ называется погрешностью округления.

При округлении числа до m значащих цифр отбрасывают все цифры, стоящие правее -й значащей цифры, или при сохранении разрядов заменяют их нулями. При этом если первая слева из отброшенных цифр больше или равна 5, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу.

При применении этого правила погрешность округления не превосходит половины единицы десятичного разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой.

Округление приближенных значений чисел с сохранением в записи только верных цифр производится до разряда, в котором записана первая справа верная цифра.

Относительная погрешность приближенного значения числа

Относительной погрешностью δ приближенного значения a числа x называется отношение абсолютной погрешности αэтого приближения к числу a, т. е.

$$\delta = \frac{\alpha}{a}.$$

Так как абсолютная погрешность α обычно бывает неизвестна, то на практике оценивают модуль относительной погрешности некоторым числомε, которое заведомо не меньше этого модуля: $|\delta| \leq \varepsilon$.

Границей относительной погрешности ε_aприближенного значения a называется отношение границы абсолютной погрешности Δa к модулю числа a:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|a|} \qquad (1.1)$$

Чем меньше относительная погрешность, тем выше качество измерений или вычислений. Относительная погрешность – величина безразмерная, что позволяет сравнивать качество измерений величин разной размерности.

В ряде задач границу абсолютной погрешности находят по данной относительной погрешности и модулю приближенного значения величины:

$$\Delta a = |a|\varepsilon_a. \qquad (1.2)$$

Действия над приближенными значения чисел

Сложение приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b, \qquad (2.1)$$

где a и b – приближенные значения чисел; Δa и Δb – границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Граница относительной погрешности суммы вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{a+b} = \frac{\Delta(a + b)}{a + b}. \qquad (2.2)$$

Вычитание приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(a - b) = \Delta a + \Delta b, \qquad (2.3)$$

где a и b – приближенные значения чисел; Δa и Δb – границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Граница относительной погрешности суммы вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{a-b} = \frac{\Delta(a + b)}{a + b}. \qquad (2.4)$$

Умножение, деление, возведение в степень приближенных значений чисел и извлечение из них корня

Формулы для оценки границ абсолютной погрешности произведения (частного сложны, поэтому на практике сначала находят относительную погрешность произведения (частного), а затем погрешности произведения (частного). Формулы для границ абсолютной и относительной погрешностей некоторых функций приведены в таблице.

Функция	Граница абсолютной погрешности	Граница относительной погрешности	Номер формулы
$y = ab$	$\Delta y = \lvert b\rvert \cdot \Delta a + \lvert a\rvert \cdot \Delta b$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$	2.5
$y = abc$	$\Delta y = \lvert bc\rvert \cdot \Delta a + \lvert ac\rvert \cdot \Delta b + \lvert ab\rvert \cdot \Delta c$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$	2.6
$y = a^n$	$\Delta y = na^{n-1} \cdot \Delta a$	$\varepsilon_y = n\frac{\Delta a}{a}$	2.7
$y = a^2$	$\Delta y = 2a \cdot \Delta a$	$\varepsilon_y = 2\frac{\Delta a}{a}$	2.8
$y = a^3$	$\Delta y = 3a^3 \cdot \Delta a$	$\varepsilon_y = 3\frac{\Delta a}{a}$	2.9
$y = \sqrt{a}$	$\Delta y = \frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{2a}$	2.10
$y = \sqrt[3]{a}$	$\Delta y = \frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{3a}$	2.11
$y = \frac{a}{b}$	$\Delta y = \frac{\lvert b\rvert \cdot \Delta a + \lvert a\rvert \cdot \Delta b}{b^2}$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$	2.12

Примеры.

1. Даны приближенные значения числа $x = \frac{2}{3}, a_1 = 0{,}6;\ a_1 = 0{,}66;\ a_1 = 0{,}67$. Какое из этих трех приближений является лучшим?

Решение. Находим:

$$\alpha_1 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}6\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right| = \frac{1}{15}, \alpha_2 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}66\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{33}{50}\right| = \frac{1}{150}, \alpha_3 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}67\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{67}{100}\right| = \frac{1}{300}.$$

Лучшим приближением числа xявляется $\alpha_3 = 0{,}67$.

2. Длина детали x (см) заключена в границах $33 \le x \le 34$. Найдите границу абсолютной погрешности измерения детали.

Решение. Примем за приближенное значение длины детали среднее арифметическое границ: $a = \frac{33+34}{2} = 33{,}5$ (см). Тогда граница абсолютной погрешности приближенного значения длины детали не превзойдет 0,5 (см). Величину Δa можно найти и как полуразность верхней и нижней границ, т. е. $\Delta a = \frac{34-33}{2} = 0{,}5$ (см). Длина детали x, найденная с точностью до $\Delta a = 0{,}5$ (см), заключена между приближенными значениями числа x:

$$33{,}5 - 0{,}5 \le x \le 33{,}5 + 0{,}5; x = 33{,}5 \pm 0{,}5 \text{ (см)}.$$

3. Найдите границу абсолютной погрешности приближенного значения 0,1968 числа x, все цифры которого верны в строгом смысле.

Решение. Граница абсолютной погрешности этого числа равна 0,00005, т. е. половине единицы последнего разряда, сохраняемого в записи.

4. Укажите верные цифры (в широком смысле) следующих чисел: 1) $3{,}73 \pm 0{,}056$; 2) $3{,}627 \pm 0{,}00008$; 3) $4{,}732 \pm 0{,}06$; 4)561274 ± 500.

Решение. 1) Граница погрешности $\Delta a = 0{,}056$ не превосходит единицы разряда десятых (неравенство $0{,}056 < 0{,}1$ верное). Следовательно, верными являются цифры 3 и 7.

2) Так как $\Delta a = 0{,}0008 < 0{,}001$, то все цифры приближенного числа 3,627 верны.

3) Поскольку $\Delta a = 0{,}06 < 0{,}1$, верными являются цифры 4 и 7.

4) Так как $\Delta a = 500 < 1000$, то верны цифры 5, 6 и 1.

5. За приближенное значение числа 26,7 взято число 27. Являются ли цифры числа 27 верными?

Решение. Так как $|26{,}7 - 27| = 0{,}3 < 1$, то цифры 2 и 7 – верные в строгом смысле.

6. Приближенное значение числа $9{,}587 \pm 0{,}03$ округлить до первого справа верного разряда.

Решение. Первая справа верная цифра находится в разряде десятых, поэтому число 9,587 округляем до десятых: $9{,}587 \approx 9{,}6$. Новое значение границы погрешности Δaсумме границы погрешности 0,03 и погрешности округления 0,013, т. е. $\Delta a = 0{,}03 + 0{,}013 = 0{,}043 < 0{,}1$. Число 0,96 является приближенным значением числа 9,587 с точностью до 0,1. Цифры 9 и 6 верные.

7. В результате измерений получили, что длина карандаша равна 16 см, а длина комнаты 730 см. Что можно сказать о качестве двух измерений?

Решение. Будем считать границу абсолютной погрешности измерений равной $\pm 0{,}5$ (см). Найдем относительные погрешности этих измерений:

$$\varepsilon = \frac{0{,}5}{16} = 0{,}0312 \approx 3{,}1\% \text{ (при имерении длины карандаша);}$$

$$\varepsilon = \frac{0{,}5}{730} = 0{,}000685 \approx 0{,}07\% \text{ (приизмерении длины комнаты).}$$

Следовательно, качество измерения длины комнаты значительно выше, чем качество измерения длины карандаша.

8. Найдите относительную погрешность числа 6,8, если обе цифры его верны в строгом смысле.

Решение. По условию, $\Delta a = 0{,}05$; поэтому $\varepsilon_a = \frac{0{,}05}{6{,}8} = 0{,}00735 \approx 0{,}7\%$.

9. Какие цифры числа 4,86 (0,3%) являются верными?

Решение. По формуле (1.2) находим

$$\Delta a = 4{,}86 \cdot 0{,}003 = 0{,}0146 < 0{,}02; a = 4{,}86 \pm 0{,}02.$$

Верными являются две первые цифры: 4 и 8.

10. При вычислении некоторой величины X стало известно, что $6 < X < 7$.Сколько верных цифр нужно взять, чтобы приближенное значение a имело относительную погрешность не больше 0,3%?

Решение. Чтобы значение aбыло наибольшим, примем $a = 6{,}99$. По формуле (1.2) получим $\Delta a = 6{,}99 \cdot 0{,}003 = 0{,}021$.Следовательно, нужно взять две верные цифры.

11. Найдите сумму Sприближенных значений чисел $6{,}8 \pm 0{,}05$; $4{,}3 \pm 0{,}05$ и $3{,}575 \pm 0{,}0005$.

Решение. Имеем

$$S = 6{,}8 + 4{,}3 + 3{,}575 = 14{,}675;\ \Delta S = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}0005 = 0{,}1005.$$

Граница абсолютной погрешности заключена в пределах $0{,}05 < 0{,}1005 < 0{,}5$.В приближенном значении суммы верными являются лишь две цифры (в разрядах десятков и единиц).Полученный результат округлим до единиц: $S = 14{,}675 \approx 15$.

12. Вычислить разность двух приближенных значений чисел $a = 5{,}863 \pm 0{,}0005$ и $b = 2{,}746 \pm 0{,}0005$. Найдите $\Delta(a - b)$ и ε_{a-b}.

Решение. По формуле (2.3) вычислим границу абсолютной погрешности разности $a - b$:

$$\Delta(a - b) = 0{,}0005 + 0{,}0005 = 0{,}001.$$

В приближенном значении разности цифра в разряде тысячных не может быть верной, так как $\Delta(a-b) > 0{,}0005$.Итак, $a - b = 3{,}117 \approx 3{,}12$.Абсолютная погрешность разности $0{,}001$. В приближенном числе $3{,}12$ все цифры верные.

По формуле (2.4) находим относительную погрешность разности:

$$\varepsilon_{a-b} = \frac{0{,}001}{3{,}12} = 0{,}00032 \approx 0{,}03\%.$$

13. Найдите верные цифры произведения приближенных значений чисел $a = 0{,}3862$ и $b = 0{,}8$.

Решение. Имеем $0{,}3862 \cdot 0{,}8 = 0{,}30896$.Границы абсолютной погрешности сомножителей равны $0{,}00005$ и $0,05$. По формуле (2.5) находим относительную погрешность произведения:

$$\varepsilon_{ab} = \frac{0{,}00005}{0{,}3862} + \frac{0{,}05}{0{,}8} = 0{,}063.$$

По формуле (1.2) находим границу абсолютной погрешности произведения:

$$\Delta(ab) = 0{,}30896 \cdot 0{,}063 = 0{,}0195; 0{,}005 < 0{,}0195 < 0{,}05.$$

Полученный результат означает, что в произведении одна верная цифра (в разряде десятых): $0{,}30896 \approx 0{,}3$.

14. Вычислите объем цилиндра $V = \pi R^2 H$,если $R = 45{,}8$ см, $H = 78{,}6$ см. Укажите верные цифры ответа.

Решение. Имеем $V = \pi \cdot 45{,}8^2 \cdot 78{,}6 = 517000$ (см^2).Используя формулы (2.6) и (2.8) и полагая $\pi \approx 3{,}14$, находим относительную погрешность:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{2\Delta R}{R} + \frac{\Delta H}{H} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{2 \cdot 0{,}05}{45{,}8} + \frac{0{,}05}{78{,}6} = 0{,}0044.$$

По формуле (1.2) находим границу абсолютной погрешности

$$\Delta V = V \cdot \varepsilon_V = 517000 \cdot 0{,}0044 = 2270 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Верными цифрами являются 5 и 1.

15. Найдите границу абсолютной погрешности частного приближенных значений чисел $a = 8{,}36 \pm 0{,}005$ и $b = 3{,}72 \pm 0{,}004$.

Решение. Имеем $8{,}36 : 3{,}72 = 2{,}25$.По формуле (2.12) находим относительную погрешность частного:

$$\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \frac{0{,}005}{8{,}36} + \frac{0{,}004}{3{,}72} = 0{,}002 = 0{,}2\%.$$

По формуле (1.2) находим границу абсолютной погрешности частного:

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = 2{,}25 \cdot 0{,}002 = 0{,}0045.$$

Полученный результат означает, что в частном все три цифры верные.

16. Вычислите $X = \frac{a}{b+c}$, если известно, что $a = 7{,}2 \pm 0{,}05, b = 3{,}46 \pm 0{,}03, c = 5{,}09 \pm 0{,}04$.

Решение. Находим:

$$X = \frac{a}{b+c} = \frac{7{,}2}{3{,}46 + 5{,}09} = 0{,}844;$$

$$\varepsilon_X = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b + \Delta c}{b + c} = \frac{0{,}05}{7{,}2} + \frac{0{,}03 + 0{,}04}{8{,}55} = 0{,}015;$$

$$\Delta X = X \cdot \varepsilon_X = 0{,}844 \cdot 0{,}015 = 0{,}0127; X = 0{,}844 \pm 0{,}0127 \text{ или } X \approx 0{,}84 \pm 0{,}01.$$

17. Вычислите относительную погрешность, допущенную при вычислении площади квадрата, если приближенное значение стороны квадрата равно $68 \pm 0{,}5$.

Решение. По формуле (2.8) получим $\varepsilon_{68^2} = 2 \cdot \frac{0{,}5}{68} = 0{,}015 = 1{,}5\%$.

18. Вычислите относительную погрешность, допущенную при извлечении квадратного корня из числа $76{,}8 \pm 0б05$.

Решение. По формуле (2.10) получим $\varepsilon_{\sqrt{76{,}8}} = \frac{0б05}{2 \cdot 7668} = 0{,}0003 = 0{,}03\%$.

19. Вычислите границу абсолютной погрешности при нахождении гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого равны $a = 56{,}8$ см, $b = 44{,}6$ см.

Решение. Имеем $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{56{,}8^2 + 44{,}6^2} = 72{,}21$ (см). По формулам (2.10) и (2.8) находим границу абсолютной погрешности:

$$\Delta c = \frac{\Delta(a^2 + b^2)}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\Delta(a^2) + \Delta(b^2)}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2a \cdot \Delta a + 2b \cdot \Delta b}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a \cdot \Delta a + b \cdot \Delta b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$= \frac{56{,}8 \cdot 0{,}05 + 44{,}6 \cdot 0{,}05}{72{,}21} = 0{,}07 \approx 0{,}1 \text{ (см)}.$$

Таким образом, $c = 72{,}2 \pm 0{,}1$ (см). Верными являются первые две значащие цифры 7 и 2.

20. С какой точностью надо измерить длину стороны квадрата, чтобы при вычислении его площади граница абсолютной погрешности не превышала 1 см^2? Грубое приближенное значение стороны квадрата равно 9 см.

Решение. Так как $S = a^2$, то используя формулу (2.8), получим $\Delta S = 2a \cdot \Delta a$, откуда

$$\Delta a = \frac{\Delta S}{2a} = \frac{1}{2 \cdot 9} = 0{,}0556 \approx 0{,}1 \text{ (см)}.$$

Итак, если измерить величину aс погрешность, не превышающей 0,1 см, то погрешность не превысит 1 см^2.

21. С какой точность надо измерить длину ребра куба a, чтобы при вычислении его объема граница абсолютной погрешности не превышала 100 см^3? Грубое приближенное значение ребра куба ровно 80 см.

Решение. Так как $V = a^3$,то, используя формулу (2.9), получим $\Delta V = 3a^2 \cdot \Delta a$,т. е.

$$\Delta a = \frac{\Delta V}{3a^2} = \frac{100}{3 \cdot 80^2} = 0{,}005 \text{ (см)}.$$

Следовательно, если измерить величину aс погрешностью, не превышающей 0,005 см. то погрешность не превысит 100 см^3.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите абсолютную погрешность округления до единиц следующих чисел: 1) 0,8; 2) 7,6; 3) 19,3; 4) 563,58.

2. Граница абсолютной погрешности приближенного значения 386 числа xравна 0,5. Укажите границы, в которых заключено число x.

3. Найдите границу абсолютной погрешности измерения, полученных в виде неравенства $37 < x < 38$.

4. Амперметр дает точность $\pm 0{,}02\ A$.При измерении силы тока получили $10{,}63\ A$.Укажите границы этого числа.

5. Атомная масса водорода $1{,}0082 \pm 0{,}0005$, а меди $63{,}44 \pm 0{,}15$. Укажите границы приближённых значений этих чисел.

6. Площадь квадрата равна $24{,}5 \pm 0{,}3$ (см^2). Найдите границы измерения площади квадрата.

7. Укажите верные цифры (в широком смысле) следующих чисел: 1) $0{,}028 \pm 0{,}004$; 2) $0,463 \pm 0{,}0008$; 3) $0{,}078 \pm 0{,}002$; 4) $12{,}78 \pm 0{,}0005$; 5) 375 ± 20.

8. Назовите верные цифры числа $\pi \approx 3{,}14$, считая $\pi \approx 3{,}1416$.

9. За приближенное значение числа $999,82$ взято число 1000. Укажите верные цифры числа 1000.

10. Сохраните только верные цифры в записи следующих приближенных значений чисел: 1) 280 ± 10; 2) 8900 ± 100; 3) 530000 ± 100; 4) 5740 ± 10.

11. Округлите до первого справа верхнего разряда приближенные значения данных чисел: 1) $0{,}3281 \pm 0{,}05$; 2) $2{,}0637 \pm 0{,}0025$; 3) $14{,}0367 \pm 0{,}8$; 4) $24{,}734 \pm 0{,}06$.

12. Округлите приближенные значения данных чисел до первого справа разряда и запишите эти числа в стандартном виде: 1) 12378 ± 25; 2) 15763 ± 50; 3) 8724 ± 25; 4) 812 ± 6.

13. Укажите границу погрешности приближения, если в записи приближенных значений данных чисел все цифры верные (в широком смысле):1) $x \approx 0{,}56$; 2) $x \approx 84{,}3$; 3) $x \approx 5{,}10$; 4) $x \approx 4{,}100$.

14. Укажите границу погрешности приближения данных чисел, записанных в стандартном виде (все цифры верные в широком смысле):1) $4,28 \cdot 10^2$; 2) $4{,}2800 \cdot 10^2$; 3) $2{,}001 \cdot 10^{-4}$; 4) $3{,}60 \cdot 10^{-3}$.

15. Вычислите относительную погрешность числа $\pi \approx 3{,}14$, считая $\pi \approx 3{,}1416$.

16. Округлите точные числа: 1) 286; 2) 45, 8; 3) 7,19 – до двух значащих цифр с недостатком и с избытком. Найдите относительную погрешность каждого округления.

17. При решении задачи сумма углов треугольника оказалась равной $117^\circ 30'$. Найдите относительную погрешность полученного приближенного значения.

18. Найдите относительную погрешность числа 2,6, если обе его цифры верные.

19. Какие цифры числа 1,28 (0,4%) являются верными?

20. Найдите сумму приближенных значений чисел $6{,}54 \pm 0{,}0005; 16{,}022 \pm 0{,}0005$ и $1{,}9646 \pm 0{,}00005$.ф

21. Вычислите сумму $a = \sqrt{5} + \sqrt{11}$,взяв приближенные значения корней с точностью до 0,001. Найдите $a, \Delta a, \varepsilon_a$.

22. Вычислите сумму $a = \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$счетырьмя значащими цифрами. Найдите $a, \Delta a, \varepsilon_a$.

23. Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединённых проводников с сопротивлением $r_1 = 4{,}8 \pm 0{,}05$ (Ом), $r_2 = 6{,}25 \pm 0{,}005$ (Ом) и $r_3 = 7{,}725 \pm 0{,}005$ (Ом). Вычислите общее сопротивление цепи по формуле $R = r_1 + r_2 + r_3$.Найдите $R, \Delta R$ и ε_R.

24. Вычислите разность чисел 8,72 и 2,6532, границы абсолютной погрешности которых соответственно равны 0,005 и 0,00005.

25. Вычислите разность $a = \sqrt{13} - \sqrt{5}$с четырьмя значащими цифрами. Найдите Δaи ε_a.

26. Найдите произведение чисел $0{,}456 \pm 0{,}0005$ и $3{,}35 \pm 0{,}005$и относительную погрешность произведения.

27. Диаметр окружности равен $12{,}5 \pm 0{,}05$ (см). Пологая $\pi = 3{,}14$, вычислите длину окружности и найдите границу абсолютной погрешности.

28. Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда по формуле $V = abh$,если $a = 7{,}8, b = 4{,}6$ и $h = 9{,}3$.Сколько верных значащих цифр получится в ответе?

29. Найдите относительную погрешность частного приближенных значений чисел $a = 19{,}8 \pm 0{,}05$ и $48{,}4 \pm 0{,}03$.

30. Найдите верные цифры частного приближенных значений чисел $a = 68{,}4 \pm 0{,}02$ и $b = 72{,}8 \pm 0{,}04$.

31. Вычислите

$$X = \frac{a + b}{c},$$

Если $a = 8{,}15, b = 7{,}65$ и $c = 6{,}29$.

33. Найдите относительную погрешность при вычислении объема куба, если приближенное значение ребра куба равно $3{,}8 \pm 0{,}05$.

34.Вычислите относительную погрешность $\sqrt[3]{26{,}4}$.

35. С какой точностью надо измерить радиус основания и высоту прямого кругового цилиндра, чтобы при вычислении объема цилиндра по формуле $V = \pi R^2 H$граница абсолютной погрешности ΔVне превышала 100 см^3? Грубые приближенные значения равны $R = 40$ см и $H = 70$ см.

36. С какой точностью следует измерить сторону квадрата, чтобы относительная погрешность не превышала 0,03%? Приближенное значение стороны квадрата 6 м.

Численное решение уравнений с одной переменной

Общие сведения о методах решения нелинейных уравнений

Нелинейные уравнения делятся на два класса – алгебраические и трансцендентные. Алгебраическими называются уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). В частности, многочлен является целой алгебраической функцией. Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.), называются трансцендентными.

Методы решения нелинейных уравнений делятся прямые и итерационные. Прямые методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). На практике, как правило, уравнений не решаются такими простыми методами. Для их решения обычно используются итерационные методы, т.е. методы последовательных приближений. Алгоритм нахождения корня уравнения с помощью итерационного метода состоит из двух этапов:

а) отыскание приближенного значения корня или содержащего его отрезка;

б) уточнения приближенного значения до некоторой заданной степени точности.

Пусть задано уравнение на множестве действительных чисел.

$$f(x) = 0. \qquad (1)$$

Приближенное значение корня (начальное приближение) уравнения (1) может быть найдено различными способами: из физических соображений, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, с помощью графических методов. Если такие априорные оценки исходного приближения провести не удается, то находят две близко расположенные точки a и b, в которых непрерывная функция $f(x)$принимает значения разных знаков, т.е.$f(a)f(b) < 0$.В этом случае между точкамиa и b находится, по крайней мере, одна точка, в которой $f(x) = 0$. В дальнейшем будем предполагать, что $f'(x)$и $f''(x)$сохраняют знак на отрезке $[a; b]$.

Метод половинного деления

Метод половинного деления состоит в разделении отрезка $[a; b]$ пополам точкой

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Если$f(c) \neq 0$ (что практически наиболее вероятно), то возможны два случая: либо $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a; c]$; либо на отрезке $[c; b]$.

Выбирая в каждом случае тот из отрезков, на котором функция меняет знак, и, продолжая процесс половинного деления дальше, можно дойти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения.

Рассмотренный метод можно использовать как метод решения уравнения с заданной точностью. Действительно, если на каком-то этапе процесса получим отрезок $[c; c']$, содержащий корень, то, приняв приближённо

$$x = \frac{c+c'}{2},$$

получим ошибку, не превышающую, значения

$$\varepsilon = \frac{c-c'}{2}.$$

Метод хорд

Предположим, что на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f(b)f''(b) > 0. \qquad (2)$$

Последовательные приближения точного корня вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n), \\ x_0 = a. \end{cases} \quad (3)$$

Если условие (2) не выполняется, а имеет место неравенство

$$f(a)f''(a) > 0, \quad (4)$$

то последовательные приближения вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(a) - f(x_n)}(a - x_n), \\ x_0 = b. \end{cases} \quad (5)$$

Метод касательных

По методу касательных вычисления проводятся по формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_0 = a. \end{cases} \quad (6)$$

при выполнении условия (4).

При выполнении условия (2) используются расчетные формулы:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_0 = b. \end{cases} \quad (7)$$

Оценка погрешности метода хорд и метода касательных может быть вычислена по формуле:

$$|x^* - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1},$$

где $m_1 \le \min_{[a;b]}|f'(x)|, x^*$ – точный корень, а x_n– приближенный корень уравнения (1).

Комбинированный метод хорд и касательных

Комбинированный метод основан на одновременном использовании методов хорд и касательных.

В результате получим две монотонные последовательности $\{x_n\}, \{x_n'\}$- приближенные значения корня по недостатку и по избытку соответственно. Для нахождения корня ξ с заданной степенью точности достаточно ограничится теми значениями$\{x_n\}, \{x_n'\}$, для которых$|x_n - x_n{}'| < 2\varepsilon$. Так как$\xi \in [x_n; x_n']$, то в качестве значения корня следует взять среднее арифметическое чиселx_n, x_n', т. е. число

$$\frac{x_n + x_n'}{2}.$$

Легко видеть, что

$$\left|\xi - \frac{x_n + x_n'}{2}\right| < \varepsilon.$$

Расчётные формулы:

а) если

$$f(a)f''(a) > 0 \quad (8)$$

на $[a; b]$, то:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n{}') - f(x_n)}(x_n' - x_n), \ \ n = 1,2, \dots \\ x_{n+1}' = x_n' - \dfrac{f(x_n')}{f'(x_n')}, \ \ n = 1,2, \dots, \\ x_0 = b, \ \ x_0' = a. \end{cases} \quad (9)$$

б) если

$$f(b)f''(b) > 0 \quad (10)$$

на $[a; b]$, то:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n{}') - f(x_n)}(x_n' - x_n), \;\; n = 1,2,\dots \\ x_{n+1}' = x_n' - \dfrac{f(x_n')}{f'(x_n')}, \;\; n = 1,2,\dots, \\ x_0 = a, \;\; x_0' = b. \end{cases} \tag{11}$$

Метод простой итерации

Для использования этого метода исходное нелинейное уравнение записывается в виде

$$x = f(x). \tag{12}$$

Пусть известно начальное приближение корня $x = x_0$.

Подставляя это значение в правую часть уравнения (12), получаем новое приближение: $x_1 = f(x_0)$. Подставляя каждый раз новое значение корня в правую часть уравнения (12), получаем последовательность значений:

$$x_{n+1} = f(x_n), n = 1,2,\dots. \tag{13}$$

Итерационный процесс прекращается, если результаты двух последовательных итераций близки $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

Достаточным условием сходимости метода простой итерации является условие$0 < |f'(x)| < 1$ на множестве действительных чисел.

Достаточным условием сходимости метода простой итерации на отрезке $[a; b]$ является условие$0 < |f'(x)| < 1, f(x_n) \in [a; b]$.

Для более точной оценки погрешности используются формулы:

$$|x^* - x_n| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0|,$$

$$|x^* - x_n| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}|,$$

где

$$\alpha = \max_{[a;b]}|f'(x)|.$$

Примеры.

1. Дано уравнение$x^3 + x^2 - 3 = 0$. Исследовать вопрос о существовании и единственности корня ξа отрезке $[0{,}5; 1{,}5]$. Вычислить три приближения корня уравнения по методу хорд и по методу касательных.

Решение.

Вычисляем знак выражения$f(0{,}5) \cdot f(1{,}5)$, где$f(x) = x^3 + x^2 - 3$. Т. к. $f(0{,}5) \cdot f(1{,}5) < 0$и$f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[0{,}5; 1{,}5]$, то уравнение имеет хотя бы один корень на заданном отрезке.

Для доказательства единственности корня вычисляем $f'(x), f''(x)$ и определим их знак на отрезке $[0{,}5; 1{,}5]$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x, f''(x) = 6x + 2.$$

$f'(x) > 0$на отрезке $[0; 1]$, следовательно, $f(x)$монотонно возрастает, и корень уравнения на отрезке$[0; 1]$ единственный;$f''(x) > 0$, следовательно, функция сохраняет на отрезке выпуклость. Т.к.$f(1{,}5) \cdot f''(1{,}5) > 0$, то для вычисления приближенных значений корня по методу хорд используются формулы (3), а по методу касательных(7).

Используя данные формулы, получаем ответ:

$x_0 = 0{,}5$; $x_1 = 1{,}012$; $x_2 = 1{,}130$; $x_3 = 1{,}166$ –приближенные значения корня по методу хорд;

$x_0' = 1{,}5$; $x_1' = 1{,}233$; $x_2' = 1{,}181$; $x_3' = 1{,}175$ – приближенные значения корня по методу касательных.

2. Вычислить четыре приближения методом простой итерации для уравнения

$$x = \sqrt[4]{x + 10}.$$

Решение.

Для исследования выберем отрезок $[0; 3]$.

1) Функция

$$f(x) = \sqrt[4]{x+10}$$

определена и имеет в каждой точке x из отрезка $[0; 3]$ производную

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x+10)^3}}.$$

2) Значения функции удовлетворяют неравенству:

$$\sqrt[4]{10} \le \sqrt[4]{x+10} \le \sqrt[4]{13} < 2,$$

т. е. все значения функции содержатся в отрезке $[0; 3]$.

3) Производная функции удовлетворяет неравенству:

$$\frac{1}{4\sqrt[4]{13^2}} \le \frac{1}{4\sqrt[4]{(x+10)^3}} \le \frac{1}{4\sqrt[4]{10^3}} < \frac{1}{4\sqrt[4]{625}} = \frac{1}{20},$$

т. е. существует

$$\alpha = \frac{1}{20} < 1$$

такое, что для всех x из отрезка $[0; 3]$ имеет место неравенство:

$$|f'(x)| \le \alpha.$$

Следовательно, выполнено достаточное условие применимости метода простой итерации на отрезке.

Выберем произвольноx_0 из отрезка $[0; 3]$, например$x_0 = 1$.Используя формулу (13), получаем четыре приближенных значения корня:

$$x_1 = f(x_0) = \sqrt[4]{11} = 1{,}82116;\ x_2 = f(x_1) = \sqrt[4]{11{,}82116} = 1{,}85423;$$

$$x_3 = f(x_2) = \sqrt[4]{11{,}85423} = 1{,}85553;\ x_4 = f(x_3) = \sqrt[4]{11{,}85553} = 1{,}85558.$$

Оценим погрешность четвертого приближения:

$$|x^* - x_4| \le \left(\frac{1}{20}\right)^4 \cdot \frac{1}{1-0{,}05}|1{,}85558 - 1{,}85553| < 0{,}6 \cdot 10^{-5}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Исследовать уравнение $f(x) = 0$на отрезке $[a; b]$ на существование и единственность корня, используя аналитический и графический методы.

Вычислить три приближения корня методом половинного деления и оценить погрешность последнего приближения.

1) $f(x) = x^2 - 2x - 5, a = 1, b = 3.$

2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10, a = 1, b = 2.$

3) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10, a = 3, b = 4.$

4) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2, a = -1, b = 0.$

5) $f(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 3x + 12, a = -4, b = -3.$

6) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 12, a = -1, b = 0.$

7) $f(x) = x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 16x - 3, a = 0, b = 1.$

8) $f(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 3x + 12, a = 1, b = 2.$

9) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 12, a = 2, b = 3.$

10) $f(x) = x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 16x - 3, a = -2, b = -1.$

2. Найти три приближения корня для уравнения $f(x) = 0$на отрезке $[a; b]$ а) методом хорд; б) методом касательных. Вычислить погрешность третьего приближения для каждого метода.

Найти приближенный корень уравнения корень уравнения $f(x) = 0$на отрезке $[a; b]$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$ комбинированным методом хорд и касательных.

1) $f(x) = x^2 - 2x - 5, a = 1, b = 3.$

2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10, a = 1, b = 2.$

3) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10, a = 3, b = 4.$
4) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2, a = -1, b = 0.$
5) $f(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 3x + 12, a = -4, b = -3.$
6) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 12, a = -1, b = 0.$
7) $f(x) = x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 16x - 3, a = 0, b = 1.$
8) $f(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 3x + 12, a = 1, b = 2.$
9) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 12, a = 2, b = 3.$
10) $f(x) = x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 16x - 3, a = -2, b = -1.$

3. Методом простой итерации вычислить корень уравнения с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.Отрезок, на котором корень существует и единственный, выделить самостоятельно.

1) $4x + e^x = 0.$ 2) $lgx = 6 - 2x.$
3)$x - 1{,}2cos\frac{x}{3} = 0.$ 4) $(0{,}2x)^3 = cosx.$
5) $lnx - \frac{1}{1+x^2} = 0.$ 6) $arccosx^2 - x = 0.$
7) $arctg\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 = 0.$ 8) $x - arctg\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$
9) $2 - x = lnx.$ 10) $x + lgx = 0{,}5.$

Элементы линейной алгебры

Определители и матрицы

Матрицы. Определители 2-го и 3-гопорядков. Свойства определителей

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}. (1)$$

Числа, стоящие в матрице, называются ее *элементами* и обозначаются буквой с двумя индексами, первый из которых равен номеру строки, а второй – номеру столбца в пересечении которых находится данный элемент. Элементы матрицы обычно обозначаются малыми буквами, а сами матрицы – соответствующими заглавными. Если матрица задаётся перечислением своих элементов, то таблица элементов заключается в круглые или квадратные скобки.

Например, матрица A размера 2×3 записывается в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица состоит из 6 элементов a_{ij}, где $i = 1{,}2$ – есть номер строки, $j = 1{,}2{,}3$ – номер столбца. Матрицы используются в технических науках и в экономике для записи табличной информации. В программированиематрицыназываютсядвумерными массивами.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной*, а число строк (столбцов) этой квадратной матрицы называется ее *порядком*. Квадратная матрица$n-$ го порядка состоит изn^2элементов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Матрица 1-го порядка состоит из одного элемента

$$(a_{11}).$$

Элементы $a_{11},\ a_{22}, \dots ,\ a_{nn}$, т. е находящиеся на линии идущей с правого верхнего угла в левый нижний, называют *главной диагональю* матрицы A, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$, т. е находящиеся на линии идущей с левого верхнего угла в правый нижний, называют *побочной диагональю* матрицы A.

Каждой квадратной матрицеA по определённому правилу сопоставляется число, которое называется *определителем(детерминантом)*этой матрицы и обозначаемоеdetA или Δ, или $|A|$. Определитель, в отличие от матрицы обозначается вертикальными линиями:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Сформулируем правила вычисления определителей 1-го, 2-го, 3-го порядков.

1. Определителем матрицы 1-го порядка называется число равное ее элементу

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

2. Определителем матрицы 2-го порядканазывается число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot (-1) = 17.$$

3. Определителем матрицы 3-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Для определителя третьего порядка применяют следующее правила.

1) Правило треугольников (Саррюса). Для его запоминания используется следующая схематическая запись, где элементы, расположенные на месте черных точек, перемножаются:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

Например,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot 5 - 2 \cdot 0 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \cdot 1 =$$
$$= 0 + 60 + 12 + 30 - 0 - 6 = 96.$$

2) Правило параллельного переноса.Для его запоминания используется следующее.

Дописываем первые два столбца определителя матрицы. Далее суммируем произведения элементов главной диагонали и двух параллельных и вычитаем из них произведения элементов побочной диагонали и двух ей параллельных (над верхними элементами диагоналей проставлены соответствующие знаки), т.е.

$$|A| = \begin{vmatrix} + & + & + & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Транспонированной матрицей для матрицы A называется матрица A^T, столбцами которой являются соответствующие строки матрицыA. Диагональ, исходящая из левого верхнего угла матрицы, называется её *главной диагональю*. Для квадратной матрицы (2)транспонированная матрица записывается так:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12} a_{22} \dots a_{n2} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{1n} a_{2n} \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования матрицы:

1) $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$;

2) $(AB)^T = B^T A^T$;

3) $(A^T)^T = A$.

Рассмотрим теперь свойства определителей, справедливые для определителей любого порядка. Для определённости будем их записывать для определителей 3-го порядка.

I. (Равноправность строк и столбцов)Определители квадратной матрицы A и её транспонированной A^T совпадают, т.е. $|A| = |A^T|$.

Дальнейшие свойства определителей мы будем формулировать для его строк. Из свойства**I**следует, что все они справедливы и для столбцов.

II.При перемене местами двух строк матрицы, её определитель меняет свой знак на противоположный. Четное количество перестановок не меняет знака определителя.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В определителе поменяли местами вторую и третью строки.

III. Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками равен 0.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0.$$

IV.Если все элементы одной строки квадратной матрицы умножить на число λ, то её определитель умножится на это число.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

V. Если квадратная матрица содержит нулевую строку, то её определитель равен0.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

VI. Если все элементы некоторой строки квадратной матрицы пропорциональны какой-нибудь другой строке, то определитель равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix} = 0.$$

VII. (Линейное свойство определителя.) Еслив квадратной матрице $i-$аястрока $(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$ является линейной комбинацией двух строк$(a'_{i1} \quad a'_{i2} \quad \cdots \quad a'_{in})$и $(a''_{i1} \quad a''_{i2} \quad \cdots \quad a''_{in})$, с коэффициентами λ и μ, то

$$|A| = \lambda |A_1| + \mu |A_2|,$$

где $|A_1|$ – определитель, у которого $i-$ая строка равна $(a'_{i1} \quad a'_{i2} \quad \cdots \quad a'_{in})$ а $|A_2|$–определитель, у которого $i-$ая строка равна $(a''_{i1} \quad a''_{i2} \quad \cdots \quad a''_{in})$, а остальные троки те же, что и у основного определителя.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (\lambda a'_{21} + \mu a''_{21}) & (\lambda a'_{22} + \mu a''_{22}) & (\lambda a'_{23} + \mu a''_{23}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a''_{22} & a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

VIII.Если к одной строке матрицы прибавить другую её строку, умноженную на числоλ, то определитель матрицы при этом не изменится.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21} + \lambda \cdot a_{31}) & (a_{22} + \lambda \cdot a_{32}) & (a_{23} + \lambda \cdot a_{33}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки или столбца

Дальнейшие свойства связаны с понятиями минора и алгебраического дополнения

Минором элемента a_{ij} называется определитель, составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания $i-$ ой стоки и $j-$ го столбца, на пересечении которых находится этот элемент. Минор элемента a_{ij} определителя$n-$ го порядка имеет порядок $(n-1)$. Будем его обозначать через M_{ij}.

Пример 1. Пусть $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, тогда $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Этот минор получается из А путём вычёркивания второй строки и третьего столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется соответствующий минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е.$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где i–номер строки и j -столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

VIII. (Разложение определителя по элементам некоторой строки). Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки на соответствующие им алгебраические дополнения.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Пример 2. Пусть$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, тогда

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) = -12,$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) = 6.$$

Пример 3. Найдём определитель матрицы$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, разложив его по элементам первой строки.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} +$$
$$+3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Формально эта теорема и другие свойства определителей применимы пока только для определителей матриц не выше третьего порядка, поскольку другие определители мы не рассматривали. Следующее определение позволит распространить эти свойства на определители любого порядка.

Определителемматрицы A $n-$го *порядка* называется число, вычисленное с помощью последовательного применения теоремы о разложении и других свойств определителей.

Можно проверить, что результат вычислений не зависит от того, в какой последовательности и для каких строк и столбцов применяются вышеуказанные свойства. Определитель с помощью этого определения находится однозначно.

Хотя данное определение и не содержит явной формулы для нахождения определителя, оно позволяет находить его путём сведения к определителям матриц меньшего порядка. Такие определения называют *рекуррентными.*

Пример 4. Вычислить определитель:$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}$.

Хотя теорему о разложении можно применять к любой строке или столбцу данной матрицы, меньше вычислений получится при разложении по столбцу, содержащему как можно больше нулей.

Поскольку у матрицы A нет нулевых элементов, то получим их с помощью свойства **VII**. Умножим первую строку последовательно на числа $(-5), (-3)$ и (-2) и прибавим её ко $2-$ой, $3-$ей и $4-$ой строкам и получим:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим получившийся определитель по первому столбцу и получим:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -8 & -12 \\ -2 & -4 & -4 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$=$

$\{$вынесем из $1-$ой строки (-4), из $2-$ой $-(-2)$, из 3ой(-1)согласно свойству 4$\}$=

$$= (-4)(-2)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

так как определитель содержит два пропорциональных столбца.

Некоторые виды матриц и их определители

Квадратная матрица, у которой ниже или выше главной диагонали стоят нулевые элементы ($a_{ij} = 0$при$i > j$, или$a_{ij} = 0$при$i < j$)называется *треугольной.*

Их схематичное строение соответственно имеет вид: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$или

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Здесь 0– означает нулевые элементы, а$*$– произвольные элементы.

Теорема. Определитель квадратной треугольной матрицы равен произведению её элементов, стоящих на главной диагонали, т.е.

$|A| = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

Например,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Квадратная матрица, у которой вне главной диагонали стоят нулевые элементы, называется *диагональной.*

Её схематический вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят только единичные элементы, называется единичной матрицей. Она обозначается через:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель единичной матрицы равен 1, т.е. $|E| = 1$.

Операции над матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы

Над матрицами можно производить следующие операции: умножение на число, сложение, умножение матриц и нахождение обратной матрицы. Первые две операции называются *линейными.*

Произведением матрицыAразмера $m \times n$*на число*λназывается матрица$B = \lambda A$размера$m \times n$, каждый элементb_{ij},которой равен λa_{ij}.

Свойства умножения матрицы на число:

1). ассоциативность относительно числового множителя

$$\lambda(\gamma A) = \lambda(\gamma A) = (\lambda\gamma)A,$$

2) дистрибутивность относительно суммы чисел

$$(\lambda + \gamma)A = \lambda A + \gamma A,$$

3) дистрибутивность относительно суммы матриц

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

Пример 1.$B = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & -10 & 0 \end{pmatrix}$.

Суммой матрицA и B одинакового размера называется матрица $C = A + B$ того же размера, каждый элемент c_{ij} которой равен $a_{ij} + b_{ij}$.

Пример 2.$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Матрицы разного размера складывать нельзя.

Эти операции обладают свойствами:

1) коммутативность

$$A + B = B + A,$$

2) ассоциативность

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Операцию умножения матриц определим в два этапа.

Из операции умножения матрицы на число можно определить разность матриц как

$$A - B = A + (-1)B.$$

Произведением строкиA из n элементов *на столбец*B из n элементов называется число AB, равное сумме произведений соответствующих элементов строки и столбца, т.е.

$$AB = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Строку и столбец разной длины перемножать нельзя.

Пример 3.$AB = (1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32.$

Произведением матрицыA размера $m \times n$*на матрицу*B размера $n \times k$ называется матрицаC размера $m \times k$, каждый элемент c_{ij} которой равен произведению i – ой строки матрицы A на j– ый столбец матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot b_{pj}.$$

Пример 4. Пусть$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найдём матрицы AB и BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \cdot 0 + 2 \cdot 2) & (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3) \\ (3 \cdot 0 + 4 \cdot 2) & (3 \cdot 1 + 4 \cdot 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0 \cdot 1 + 1 \cdot 3) & (0 \cdot 2 + 1 \cdot 4) \\ (2 \cdot 1 + 3 \cdot 3) & (2 \cdot 2 + 3 \cdot 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $AB \neq BA$, т.е. умножение матриц свойством коммутативности не обладает.

Единичная матрица Eиграет роль единицы при умножении на квадратную матрицу, т.е. для любой квадратной матрицы A верно равенство

$$AE = EA = A.$$

Произведение матриц соответствующих размеров обладает свойствами:

1) ассоциативность

$$(AB)C = A(BC),$$

2)ассоциативность относительно числового множителя

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B),$$

3) дистрибутивностьотносительно суммы матриц

$$A(B + C) = AB + AC \text{ и } (B + C)A = BA + CA.$$

4) антикоммутативность

$$AB \neq BA.$$

Кроме того, для квадратных матриц $|AB| = |A| \cdot |B|$, т.е. определитель произведения матриц равен произведению их определителей.

Обратной матрицей для квадратной матрицы A называется такая матрица A^{-1}, что выполняется равенство $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Квадратная матрица A, определитель которой равен нулю, называется *вырожденной*, матрица, определитель которой не равен нулю, называется *невырожденной.*

Пример 5. Матрица$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ – вырождена, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – невырождена.

Из соотношения $|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$ следует, что у вырожденной матрицы не может быть обратной ($0 \cdot |A^{-1}| \neq 1$).

Присоединённой матрицей для квадратной матрицы A называется матрица$\tilde{A}$, элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A, т.е.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Пусть$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема об обратной матрице. Невырожденные матрицы и только они имеют обратные матрицы, которые находятся по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^T$$

(Здесь$\tilde{A}^T$ – присоединённая транспонированная матрица).

Пример 7. Найдём обратную матрицу для матрицы$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Поскольку$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, то обратная матрица существует. В предыдущем примере мы получили, что $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1\cdot(-2) + 2\cdot 1{,}5) & (1\cdot 1 + 2\cdot(-0{,}5)) \\ (3\cdot(-2) + 4\cdot 1{,}5) & (3\cdot 1 + 4\cdot(-0{,}5)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((-2)\cdot 1 + 1\cdot 3) & ((-2)\cdot 2 + 1\cdot 4) \\ (1{,}5\cdot 1 + (-0{,}5)\cdot 3) & (1{,}5\cdot 2 + (-0{,}5)\cdot 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Обратная матрица обладает следующими свойствами:

Если A и B невырожденные матрицы, то

1) $(A^{-1})^{-1} = A$,

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

3) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Ранг матрицы

Рассмотрим одну числовую характеристику любой (необязательно квадратной) матрицы. Ранг матрицы определяет число так называемых базисных строк или столбцов матрицы, через которые с помощью линейных операций можно получить все остальные строки или столбцы матрицы.

Минором $k-$го *порядка* матрицы A называется определитель, составленный из элементов стоящих на пересечении произвольно выбранных $k-$столбцов и $k-$строкэтой матрицы.

Рангом матрицы A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Он обозначается символом $r(A)$ или $rangA.r(A)$ – целое неотрицательное число, не превосходящее числа строк и столбцов матрицы A. Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

Для нахождения $r(A)$ формально необходимо рассмотреть все миноры A, начиная с $1-$го порядка и проверить их на вырожденность.

Метод окаймляющих миноров позволяет сократить эту процедуру. Он состоит в следующем. Выбираем любой невырожденный минор $1-$го порядка (ненулевой элемент матрицы A). Обозначим его через M_1. Затем рассматриваем все миноры 2-го порядка, содержащие M_1 (окаймляющие его). Если все они вырождены, то $r(A) = 1$, если нет, то невырожденный минор $2-$го порядка обозначаем через M_2и так далее. Если у матрицы A есть невырожденный минор $k-$го порядка и все окаймляющие его миноры (если они есть) вырождены, то $r(A) = k$, иначе выбираем минор M_{k+1} и продолжаем этот процесс.

Пример 9. Найдём ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У матрицы выбираем невырожденный минор $1-$го порядка $M_1 = (a_{11}) = 1$. Среди окаймляющих его миноров есть один невырожденный

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Единственный минор 3-го порядка окаймляющий M_2 – это сама матрица A. Но, поскольку

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

то A – вырождена и $r(A) = 2$.

Рассмотрим ещё один метод нахождения $r(A)$, который называется *методом элементарных преобразований* или *методом Гаусса*.

Элементарными преобразованиями для матрицы А называются следующие её преобразования:

1)Перестановка строк или столбцов местами.

2) Умножение строки или столбца на ненулевой коэффициент.

3) Прибавление к одной строке или столбцу матрицы другой её строки или столбца, умноженной на некоторое числоλ.

4) Зачёркивание нулевой строки или столбца матрицы.

Матрица B, полученная из A с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной* ей и обозначается в виде $A \sim B$.

Теорема. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Теорема. Ранг треугольной матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Метод Гаусса состоит в том, что с помощью элементарных преобразований матрицаA приводится к треугольному виду с ненулевыми элементами на главной диагонали (если матрица не квадратная, то она приводится к ступенчатому виду). Число этих ненулевых элементов совпадает с рангом матрицы.

Перестановку строк или столбцов местами будем обозначать символом, где стрелки указывают на переставляемые строки или столбцы, а третье элементарное преобразование символом, где стрелка начинается у строки, которую умножаем на λ и заканчивается у изменяемой строки.

Пример 10. Найдём ранг матрицы

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Проведём элементарные преобразования согласно методу Гаусса:

1) поменяем местами первый и второй столбец матрицы;

2) умножим первую строку матрицы поочередно на (-4) и (-5) и сложим соответственно со второй и третьей строками;

3) умножим на (-3) вторую строку и прибавим к третьей;

4) вычеркнем третью нулевую строку.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,$r(A) = 2$.

Базисным минором называется любой из отличных от нуля миноров матрицы А, порядок которого равен $r(A)$.

Примеры.

1. Для данных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислить $3A + 2B - 4C$.

Решение.

Прежде чем производить линейные действия над матрицами, необходимо убедится в том, что их размерности совпадают. Все три матрицы имеют размерности 2×3 по

количеству строк и столбцов соответственно. Действия выполняем согласно правилам сложения матриц и умножения матрицы на число:

$$3A + 2B - 4C$$
$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 0 - 4\cdot 3 & 3\cdot 3 + 2\cdot 5 - 4\cdot 1 & 3\cdot(-1) + 2\cdot 7 - 4\cdot(-1) \\ 3\cdot 4 + 2\cdot(-2) - 4\cdot 2 & 3\cdot 1 + 2\cdot(-2) - 4\cdot(-2) & 3\cdot 2 + 2\cdot 4 - 4\cdot) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6 & 15 & 15 \\ 0 & 17 & 14 \end{pmatrix}.$$

2. Для данных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 3 \quad 2), D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

1) проставить размерность;
2) протранспонировать матрицы;
3) перемножить, если это возможно.

Решение.

а) Размерность матрицы определяется количеством её строк и столбцов. Матрица A имеет две строки и два столбца, матрица B - две строки и один столбец, и т.д. Поэтому:

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},\ C_{1\times 3} = (1 \quad 3 \quad 2),$$
$$D_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, F_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Протранспонируем заданные матрицы. Для этого соответствующие строки матриц запишем столбцами:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B^T = (5 \quad 3), C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, D^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, F^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

в) Рассмотрим операцию перемножения. Перемножить можно лишь те матрицы, в которых количество столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй матрицы.

Матрица А имеет размерность$2 \times \underline{2}$, а матрицаB–размерность$\underline{2} \times 1$, поэтому матрицы перемножить можно и в результате перемножения мы получаем матрицу-столбец размерности2×1 соответствующей крайним индексам матриц $A_{2\times 2}$ и $B_{2\times 1}$.

$$AB = A_{2\times \underline{2}} B_{\underline{2}\times 1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 + 1\cdot 3 \\ -1\cdot 5 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

В обратном порядке эти матрицы перемножать нельзя. Произведение

$$B_{2\times \underline{1}} A_{\underline{2}\times 2}$$

не определено, т.к. внутренние индексы (они подчеркнуты) различны.

Перемножим теперь матрицы $A_{2\times \underline{2}}$ и $D_{\underline{2}\times 3}$. Внутренние индексы совпадают, следовательно, произведение данных матриц определено и в результате получится матрица размерности2×3.

$$AD = A_{2\times \underline{2}} D_{2\times \underline{3}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 4 & 2\cdot 3 + 1\cdot 1 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ (-1)\cdot 2 + 4\cdot 4 & (-1)\cdot 3 + 4\cdot 1 & (-1)\cdot(-1) + 4\cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Перемножим теперь матрицы $D_{2\times \underline{3}}$ и $F_{\underline{3}\times 3}$. Внутренние индексы совпадают, следовательно, произведение данных матриц определено и в результате получится матрица размерности2×3.

$$DF = D_{2\times\underline{3}}F_{\underline{3}\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 & 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 0 + 3\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) \\ 4\cdot 1 + 1\cdot(-1)2\cdot 2 & 4\cdot 3 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 & 4\cdot 0 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 8 & 7 \\ 7 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножим теперь матрицы $B_{2\times\underline{1}}$ и $C_{\underline{1}\times 3}$. Внутренние индексы совпадают, следовательно, произведение данных матриц определено и в результате получится матрица размерности2×3.

$$BC = B_{2\times\underline{1}}C_{\underline{1}\times 3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 3 & 5\cdot 2 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 3 & 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Перемножим теперь матрицы$C_{1\times\underline{3}}$ и $F_{\underline{3}\times 3}$. Внутренние индексы совпадают, следовательно, произведение данных матриц определено и в результате получится матрица размерности1×3.

$$CF = C_{1\times\underline{3}}F_{\underline{3}\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) + 2\cdot 2 & 1\cdot 3 + 3\cdot 1 + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 + 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Для данной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, i = 2, j = 3,$$

вычислить определитель:

1) методом параллельного переноса;

2) методом треугольников;

3) разложением по i -ой строке и по j -му столбцу;

4) вычислить, получив нулевые элементы в первом столбце используя элементарные преобразования со строками;

5) вычислить обратную матрицу A^{-1} и проверить равенство$AA^{-1} = E$.

Решение.

1) Согласно правила параллельного переноса, допишем к нашему определителю две первые строки и выполним необходимые действия:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 2\cdot 2\cdot 5 + 7\cdot(-4)\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot(-3) - 1\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot(-4)\cdot(-3) - 7\cdot 3\cdot 5$$
$$= -148.$$

2)вычислим определитель методом треугольников:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 2\cdot 2\cdot 5 + 7\cdot(-4)\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot(-3) - 1\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot(-4)\cdot(-3) - 7\cdot 3\cdot 5$$
$$= -148.$$

3) вычислим определитель разложением по элементам 2-ой строки:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

Выпишем алгебраические дополнения и вычислим их:

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -38, A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9, A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 13.$$

Наше разложение по второй строке имеет вид:

$$|A| = 3 \cdot (-38) + 2 \cdot 9 + (-4) \cdot 13 = 148.$$

Разложением по элементам 3-его столбца:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Аналогично предыдущего пункта записываем миноры, вычисляем их, получаем:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-11) + 4 \cdot (-13) + 5 \cdot (-17) = -148.$$

4) Используя элементарные преобразования со строками, получим нулевые элементы в первом столбце. Для этого:

1) умножим третью строку на (-2) и прибавим к первой строке,

2) умножим третью строку на (-3) и прибавим ко второй строке.

Получили определитель эквивалентный исходному

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & -9 \\ 0 & 11 & -19 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по элементам первого столбца

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 13 & -9 \\ 0 & 11 & -19 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \big(13 \cdot (-19) - 11 \cdot (-9)\big)$$
$$= -148.$$

4. Вычислить матрицу, обратнуюк данной

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

и проверить равенство$AA^{-1} = E$.

Решение.

Вычислим определитель матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-23) - 0 + 1 \cdot 5 = -110.$$

Т.к. определитель отличен от нуля, то матрица не является вырожденной и для нее определена обратная матрица. Для её нахождения протранспонируем матрицуA и вычислим её алгебраические дополнения

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 25 = -23, A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$
$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -1, A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$
$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10, A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -24,$$
$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5, A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -25,$$
$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

Присоединенная матрица:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -23 & 5 & -1 \\ -2 & 10 & -24 \\ 5 & -25 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица запишется в виде:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-110}\begin{pmatrix} -23 & 5 & -1 \\ -2 & 10 & -24 \\ 5 & -25 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{110} & -\frac{1}{22} & \frac{1}{110} \\ \frac{1}{55} & -\frac{1}{11} & \frac{12}{55} \\ -\frac{1}{22} & \frac{5}{22} & -\frac{1}{22} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку и убедимся, что$AA^{-1} = E$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{23}{110} & -\frac{1}{22} & \frac{1}{110} \\ \frac{1}{55} & -\frac{1}{11} & \frac{12}{55} \\ -\frac{1}{22} & \frac{5}{22} & -\frac{1}{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Обратная матрица вычислена верно.

Задания для самостоятельного решения.

1. Вычислить $2A + 3B - 5C$:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

6) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

8) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

10) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Для данных матриц:

а) проставить размерность;

в) протранспонировать матрицы;

с) перемножить, если это возможно.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5) $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

6) $A=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}3 & -3\end{pmatrix}$.

7) $A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & -4\\ 2 & 1\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 2\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

9) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

10) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6 & 2 & -4\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

3. Для данной матрицыA вычислить определитель:

1) методом параллельного переноса;

2) методом треугольников;

3) разложением по $i-$ ой строке и по $j-$ му столбцу;

4) вычислить, получив нулевые элементы в первом столбце используя элементарные преобразования со строками;

5) вычислить обратную матрицуA^{-1}.

1) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}, i=2, j=1.$

2) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ -2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}, i=3, j=2.$

3) $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}, i=2, j=3.$

4) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}, i=3, j=1.$

5) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, i=3, j=3.$

6) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}, i=3, j=2.$

7) $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 1 & -4 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}, i=2, j=1.$

8) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, i=3, j=3.$

9) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}, i=2, j=3.$

10) $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}, i=3, j=2.$

4. Решить уравнение$AX=B$,если

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(воспользоваться свойством обратной матрицы).

5. Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2x & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & 3x & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1200 & 2400 & 3600 \\ 0{,}001 & 0{,}002 & 0{,}003 \\ 27 & 98 & 622 \end{vmatrix}.$$

(воспользоваться свойствами определителя).

7. Вычислить определитель, приведя его к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 8 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Матричный метод решения. Правило Крамера

Системой из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь переменные $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ называются *неизвестными* системы, числа a_{ij}, где $i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n$ называются *коэффициентами* системы, а числа $b_1, b_2, \dots, b_m$– *свободными членами*.

Числа $x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ$, обращающие все уравнения системы в тождества, называются *решением* системы. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной,*если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Пример. Система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

совместна, так как имеет решение

$$x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

несовместна.

Имеется более краткая запись СЛАУ, она состоит в следующем.

Обозначаем через A матрицу размера $m \times n$, составленную из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1} a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Она называется *матрицей системы*. Столбец свободных членов обозначим через

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

а столбец из неизвестных системы через

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1) можно записать в виде матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

или, короче,$AX = B$.

Эта запись называется *матричной формойзаписи системы*.

В случае, если матрица A квадратная, матричная форма записи позволяет решить систему с использованием обратной матрицы A^{-1}.

Теорема.СЛАУ, имеющая квадратную невырожденнуюматрицу, имеет единственное решение, которое находится по формуле:

$$X = A^{-1}B.$$

Метод решения СЛАУ с использованием соотношения $X = A^{-1}B$ называется *матричным методом решения*.

Данный метод решения систем можно записать и в несколько ином виде, который называется *правилом Крамера*.

Следствие. Пусть СЛАУ имеет квадратную матрицу A $n-$ го порядка, $|A| = \Delta \neq 0$. Пусть Δ_i – определитель матрицы системы, в которой вместо $i-$ го столбца подставлен столбец свободных членов. Тогда эта система имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad \mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{n}.$$

Эти формулы называются *формулами Крамера*.

Метод Гаусса для исследования и решения СЛАУ

Матричный метод и правило Крамера обладают двумя существенными недостатками. Во–первых, они применимы только для систем с невырожденной квадратной матрицей и не работают в случае, когда $\Delta = 0$. Во–вторых, с ростом nобъём вычислений для этих методов слишком быстро возрастает и для $n > 10$ они уже практически неприменимы. Для исследования систем линейных уравнений и нахождения их решений можно использовать метод Гаусса.

Исследовать систему – это значит определить совместна ли она и, в случае совместности, определить, сколько решений она имеет.

Расширенной матрицей СЛАУ. называется матрица, полученная из матрицы системы приписыванием справа столбца свободных членов системы.

Для системы из m уравнений с n неизвестными, она имеет размер $m \times (n+1)$ и обозначается через$\bar{A}$.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots & \dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Свободные члены обычно отделяются вертикальной чертой.

Понятно, что ранг $\bar{A}$ либо равен рангу A, либо превышает его на 1. Следующая теорема позволяет устанавливать факт совместности или несовместности системы.

Теорема Кронекера – Капелли. Система линейных алгебраических уравнений совместна только в том случае, когда ранг её матрицы совпадает с рангом расширенной матрицы ($r(A) = r(\bar{A})$).Если $r(A) \neq r(\bar{A})$, то СЛАУ решений не имеет.

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие теоремы.

1) Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, т.е. $r = n$, то система имеет единственное решение.

2) Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, т.е. $r < n$, то система неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Пусть $r < n$и r - неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *базисными*, если определитель матрицы из коэффициентов при них (т.е. базисный минор) отличен от нуля. Остальные$n - r$называются *свободными*.

При решении системы линейных уравнений не нужно отдельно вычислять ранги, а затем их сравнивать. Достаточно сразу применить метод Гаусса.

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не над самими уравнениями, а над матрицей их коэффициентов.

Достоинства метода Гаусса по сравнению с другими:

1) Значительно менее трудоемкий.

2) Позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае совместности найти её решения (единственное или бесконечное множество).

3) Дает возможность найти максимальное число линейно независимых уравнений – ранг матрицы системы.

Однородные и неоднородные системы линейных алгебраических уравнений

Система ЛАУ, все свободные члены которой нулевые, называется *однородной.*

СистемаЛАУ, столбец свободных членов которой ненулевой, называется *неоднородной.*

В общем случае однородная система из *m* уравнений с *n* неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

В матричной форме она записывается в виде $AX = 0$.

Здесь

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

нулевой столбец.

Однородная система всегда совместна, так как она имеет решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots,$ $x_n = 0$, которое называется *тривиальным*. Матричный метод и метод Крамера не имеет смысла применять для решения однородных систем с квадратной матрицей A. Поскольку, если A не вырождена, то система имеет единственное тривиальной решение, если же $|A| = 0$, то эти методы неприменимы, система имеет бесконечное число решений.

Метод Гаусса для решения однородных систем используется в следующем виде.

Записываем матрицу системы A и с помощью элементарных преобразований приводим её к треугольному виду. Возможны два случая.

1)$r(A) = n$. Система имеет единственное тривиальное решение.

2) $r(A) < n$. Система имеет бесконечно много решений, зависящих от $n - r$ параметров.

Обозначим решение системы (2)$x_1 = p_1, x_2 = p_2, \dots, x_n = p_n$в виде строки $e_1 = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами.

1)Если строка $e_1 = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. - решение системы (2), то и строка $\lambda e_1 = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n)$ - также решение этой системы.

2)Если строка $e_1 = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ и $e_2 = (q_1, q_2, \dots, q_n)$- решения системы (2), то при любых $c_1 и c_2$ их линейная комбинация $c_1e_1 + c_2e_2 = (c_1p_1 + c_2q_1,\ c_1p_2 + c_2q_2, \dots,$ $c1pn+c2qn$ - также решение данной системы.

Набор строк (решении системы (2)) $e_i = \left(p_1^i, p_2^i, \dots, p_n^i\right),\ i = \overline{1,m},$ называется *линейно зависимым*, если существуют одновременно не равные нулю числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ такие, что выполняется равенство:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m = 0\big(= (0,0,\dots,0)\big). \qquad (3)$$

Если равенство (3) выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, то набор решении $e_i = \left(p_1^i, p_2^i, \dots, p_n^i\right),\ i = \overline{1,m}$, называется *линейно независимым*.

Из сформулированных свойств следует, что всякая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы.Поэтому представляет интерес найти такие линейно независимые решения системы (2), через которые линейно выражались бы все остальные ее решения.

Система линейно независимых решений$e_i = \left(p_1^i, p_2^i, \dots, p_n^i\right),\ i = \overline{1,m}$,называется *фундаментальной*, если каждое решение системы (1) является линейной комбинацией решений $e_i = \left(p_1^i, p_2^i, \dots, p_n^i\right),\ i = \overline{1,m}$.

Теорема. Если ранг r матрицы коэффициентов при неизвестных системы линейных однородных уравнений (1) меньше числа неизвестных n, то всякая фундаментальная система решений системы (1) состоит из $n - r$решений. Поэтому общее решение системы(1) линейных однородных уравнений имеет вид: $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m$, где $e_1, e_2, \dots, e_m$ - любая фундаметальная система решений, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ - произвольные числа и $m = n - r$.

Примеры.

1. Решим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

матричным методом.

Решение. Матрица этой системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

невырожденная,т. к.$|A| = -3$.

Найдём обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^T = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для данной системы

$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$

Поэтому

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

Следовательно

$$x_1 = 1, x_2 = 2.$$

2. Решим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

по правилу Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

поэтому:

$$x_1 = \frac{-3}{-3} = 1, \qquad x_2 = \frac{-6}{-3} = 2.$$

3. Исследовать и решить систему

$$\begin{cases} y - z = 3, \\ x + z = 0, \\ 2x - y - z = 1. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу $\overline{\mathrm{A}}$ и приведём её к треугольному виду:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

т.к.$r(\overline{\mathrm{A}}) = r(A) = 3$ система совместна и имеет единственное решение. По последней матрице восстанавливаем систему и решаем её, начиная с последнего уравнения.

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y - z = 3, \\ z = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0, \\ y + 1 = 3, \\ z = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2 \\ z = -1. \end{cases}$$

4. Исследовать и решить систему

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y - z = 3, \\ 2x + 2y = 1. \end{cases}$$

Запишем и приведем к треугольному виду матрицу$\bar{A}$.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right).$$

Мы получили, что$r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$ т. е.$r(A) \neq r(\bar{A})$. Система решений не имеет.

5. Исследовать и решить систему

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x + z = 0, \\ y - z = 3. \end{cases}$$

Запишем и приведем к треугольному виду матрицу$\bar{A}$.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Здесь $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$. Система имеет бесконечно много решений зависящих от $3 - 2 = 1$ свободного неизвестногоz. Задавая свободному неизвестному произвольные значения $z = \mathrm{c}$, найдем бесконечное множество решений системы. Восстановим систему по последней матрице и решим её.

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ y - z = 3, \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3, \\ y - c = 3, \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -c, \\ y = c + 3, \\ z = c. \end{cases}$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + 3y + 4z = 0. \end{cases}$$

Запишем матрицу системы и преобразуем её.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = 3$, следовательно, система имеет единственное решение: $x = 0, y = 0, z = 0$.

7.Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + 3y + 3z = 0. \end{cases}$$

Преобразуем матрицу системы.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$r(A)=2$, поэтому система имеет бесконечно много решений, зависящих от одного параметра.

Восстановим систему и решим её.

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\ y+z=0,\\ z=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+c=0,\\ y+c=0,\\ z=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=-c,\\ z=c.\end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений. Решения данной системы должны удовлетворять двум уравнениям: $x+y+z=0$ и $x+2y+2z=0$.

Общее решение системы будет иметь вид:

$$X=\begin{pmatrix}0\\-z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1z\\1z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Получили, что всякое решение исходной системы является линейной комбинацией решения $e_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$,т.е. решение$e_1$является фундаментальной системой решения исходной системы, т.е.$X=ce_1$.

Дифференциальное исчисление

Пределы

Число А называется *пределом* функции f(x) при $x\to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое значение $\delta>0$, что при $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$. Пишут $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$. Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах:

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$, (1)

2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$, (2)

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ (при $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$) (3)

Используя также следующие пределы:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$; 2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$; 3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$; 4) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{a^{\alpha}-1}{\alpha}$;

5) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1+\alpha)^m-1}{\alpha}=m$. (4)

Здесь $\alpha=\alpha(x)$ - бесконечно малая функция $\left(\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0\right)$

<u>Сравнение бесконечно малых</u>

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x \to a$. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то бесконечно малые называются эквивалентными. Пишут: α~β.

Теорема. Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой, то есть если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=m,$ α~α_1, β~β_1, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=m, \qquad (5)$$

Полезно использовать эквивалентность следующих бесконечно малых: если $\alpha \to 0,$ то

$\sin\alpha$ ~α, tgα~α, arcsinα~α, arctgα~α, ln(1-α)~α,

$a^{\alpha}-1$~αln$a$, $(1+\alpha)^m-1$~αm (5')

Дифференцирование функций

Производной от функции $y=f(x)$ в точке x называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x) \qquad (6)$$

Нахождение производной называется дифференцированием функции.

Основные правила дифференцирования

Пусть C=const, u=u(x), v=v(x) – дифференцируемые функции. Тогда:

1) $C'=0$; 2) $(Cu)'=Cu'$; 3) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; 4) $(uv)'=u'v+uv'$; 5) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

если $y=f(u), u=u(x)$, то $y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)$ (7)

Производная степенно – показательной функции

$$(u^v)'=v\cdot u^{v-1}\cdot u'+u^v\cdot\ln u\cdot v', \qquad (8)$$

где u=u(x), v=v(x) – дифференцируемые функции.

Таблица производных

1. $C'=0$, C - любое число
2. $x'=1$
3. $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$
4. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$
10. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
11. $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$

6. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln\left(a\right)$

7. $\left(e^x\right)' = e^x$

8. $(\sin x)' = \cos x$

9. $(\cos x)' = -\sin x$

15. $(\mathrm{arcctg x})' = -\dfrac{1}{1+\mathrm{x}^2}$

16. $\left((kx+b)^n\right)' = nk(kx+b)^{n-1}$

17. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

18. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 1

Задание № 1

1.Решите систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

1) $\begin{cases} -5x_1 - x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8x_1 - x_3 = -6, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6, \\ -3x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} -7x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -6, \\ 7x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -6, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

8) $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -3, \\ 8x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3, \\ -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9, \\ -x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_3 = -4, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$

16) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ -4x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_3 = 2. \end{cases}$

18) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$

20) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$

2. Решите систему линейных уравнений, используя правило Крамера:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} -x_1 - x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_3 = -4, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$

10) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$

11) $\begin{cases} -5x_1 - x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 8x_1 - x_3 = -6, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6, \\ -3x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

14) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

15) $\begin{cases} -7x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -6, \\ 7x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -6, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

17) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

18) $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -3, \\ 8x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3, \\ -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

20) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9, \\ -x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ -4x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_3 = 2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$

4) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ -3x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_3 = 2. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

13) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ -3x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 1. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 5, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

16) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ -x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -4, \\ x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$

17) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3, \\ -x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

18) $\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ -x_1 - x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

19) $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 = -4. \end{cases}$

20) $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$

4. Решите однородную систему линейных уравнений, выделив какую-либо фундаментальную систему:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ -4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 6x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

10) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

11) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

12) $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

16) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

17) $\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

18) $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 - 12x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_1 - x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

19) $\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

Задание № 2 Вычислить пределы функций.

1. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x}{-5x^2+x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\ln(x+4)}{ctg(x+2)}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2(x))}{\exp(x^2)-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to-1}(3+2x)^{5/(x+7)}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1-6x}-1+2x}{x^2}$.

2. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+7x+2}{x^2-5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0,5}\dfrac{2x-1}{\ln(0,5-x)}$; 3) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\arcsin(4-x)}{\ln(x-3)}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x^2)^{1/2x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\exp(x/2)-2-x}{x^2}$.

3. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2-x}{3x^2+7x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{1-\cos(2/x)}$; 3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi x}{4}\right)}{\exp(x+1)-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to4}(5-x)^{-2/(x-4)}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6\sin(2x)-12x}{x^3}$.

4. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+5}{-5x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{\ln(1-x^2)}{\sin(3x-1)}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-\sin^2(3x))}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to-3}(7+2x)^{4/(x+3)}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1-2x}{x^2}$.

5. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2-x}{2x^2+3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\exp(x-3)}{x^2-5x+6}$; 3) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{tg^2(\pi-3x)}{(3x-\pi)^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{-3/(4-2x)}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3tg(2x)-6x}{x^3}$.

6. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+5x+2}{x^2+4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{x+1}}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}$; 3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ctg(\pi x/2)}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}(1-5x^2)^{3/x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-3x)+3x}{x^2}$.

7. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+5x}{x^2+4x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(1/x)}{3x^2+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1-3x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to-4}(9+2x)^{6/(x+4)}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\exp(-5x)-1+5x}{x^2}$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x-1}{-2x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)}{\sin(5x)}$; 3) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-tg(x)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}$;

4) $\lim\limits_{x\to-2}(-3-2x)^{-2/(x-2)}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin(4x)-4x}{x^3}$.

9. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7x^2+4x}{3x^2-x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{ctg(x-3)}{2^x}$; 3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+4}{\arcsin(x+2)}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{3/(x-1)}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin(3x)-6x}{x^3}$.

10. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-3x-1}{-4x^2+2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x-3}{tg(x+1)}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(6x)}{\exp(-x^2)-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{1/(6-2x)}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln(1+0{,}5x)-x}{x^2}$.

11. 1) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\cos(x-3)+2x}{x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{3x^2-3x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to0{,}5}\dfrac{6x^2+5x+1}{2x^2-x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to4}(5-x)^{2/(x-4)}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\ln(x)}$.

12. 1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{tg(\pi x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{2x^2-2x+7}$; 3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-x-6}$;

4) $\lim\limits_{x\to-3}(7+2x)^{4/(x+3)}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

13. 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x)}{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-4}{4x^2+3x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to0{,}5}\dfrac{2x^2+3x+1}{6x^2+x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin^2(x))^{1/(1-\cos(4x))}$; 5) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{arctg(x+2)}{x+2}$.

14. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-2}{x^3-x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin(3x))^{1/(1-\cos(2x))}$; 5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)^2}{\sin^2(x-3)}$.

15. 1) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin(x)\cdot(tg(x)+x)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+11}{7x^3-5x^2+x}$; 3) $\lim\limits_{x\to1/3}\dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2-5x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to3}(10-3x)^{1/(3(3-x))}$; 5) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x-7}+2}$.

16. 1) $\lim\limits_{x\to0}(2+x)^{1/x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^3+5x-10}$; 3) $\lim\limits_{x\to-1/3}\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2-2x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to-2}(5+2x)^{1/(x+2)}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^{\sin(x)}-1}{\sin(2x)}$.

17. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\exp(-x^2)-1}{arctg(x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-8}{3x^2-5x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to0{,}5}\dfrac{2x^2+x-1}{6x^2-x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}(9-x^3)^{4/(x-2)}$; 5) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x-7}+2}$.

18. 1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos(3x)}{ctg(x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+8}{3x^2+6x-15}$; 3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x^2)^{1/(2(1-x))}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^{\sin(x)}-1}{\sin(2x)}$.

19. 1) $\lim\limits_{x\to-2-}\dfrac{\exp(x+2)-1}{\ln(x+2)}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^3+9x+17}{21x^3+10x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to1/3}\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+11x-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to-4}(9+2x)^{-1/(2(x-4))}$; 5) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{x+1}$.

20. 1) $\lim\limits_{x\to 1}(40x)^{1/(1+x)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+9x^2+2x}{3x^3-8x+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{6x^2-5x+1}{2x^2-3x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{3/(x-1)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{5-2x}-1}$.

Задание № 3 Найти производные первого порядка данных функций $y(x)$.

1. 1) $y(x)=3x^5-\sin(x)$, 2) $y(x)=\sqrt{x}tg(x)$,

3) $y(x)=\dfrac{\ln(x)}{4-3\cos(x)}$

2. 1) $y(x)=4x^4+e^x$, 2) $y(x)=\sin(x)\cdot\ln(x)$,

3) $y(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{ctg(x)}$

3. 1) $y(x)=3\cdot\sqrt[3]{x}-\ln(x)$, 2) $y(x)=e^x\arcsin(x)$,

3) $y(x)=\dfrac{ctg(x)}{x^4}$

4. 1) $y(x)=5x^2-\arcsin(x)$, 2) $y(x)=\sqrt[3]{x^2}\ln(x)$,

3) $y(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{e^x}$

5. 1) $y(x)=4\cdot\sqrt[4]{x}+arctg(x)$, 2) $y(x)=x^5e^x$,

3) $y(x)=\dfrac{tg(x)}{\ln(x)}$

6. 1) $y(x)=5\cdot\sqrt[5]{x}-7arcctg(x)$, 2) $y(x)=\cos(x)\cdot(3x-1)$,

3) $y(x)=\dfrac{3x^5}{e^x}$

7. 1) $y(x)=10x^3+2\cos(x)$, 2) $y(x)=\sin(x)\cdot\sqrt[4]{x}$,

3) $y(x)=\dfrac{\ln(x)}{\arcsin(x)}$

8. 1) $y(x)=6\cdot\sqrt[3]{x^2}-7tg(x)$, 2) $y(x)=e^x\cdot\arccos(x)$,

3) $y(x)=\dfrac{ctg(x)}{2x^4}$

9. 1) $y(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+3ctg(x)$, 2) $y(x)=\ln(x)\cdot arctg(x)$,

3) $y(x)=\dfrac{e^x}{\arcsin(x)}$

10. 1) $7x^6 + 2\arccos(x)$, 2) $y(x) = e^x \cdot ctg(x)$,

3) $y(x) = \dfrac{5\ln(x)}{\sqrt[3]{x^2}}$

11. 1) $y(x) = \dfrac{7}{5 \cdot \sqrt[7]{x^5}}$, 2) $y(x) = \sin^4(x/4)$,

3) $y(x) = \exp\left(arctg(x/3)\right)$

12. 1) $y(x) = \dfrac{4}{3 \cdot \sqrt[4]{x^3}}$, 2) $y(x) = tg^5(2x/5)$,

3) $y(x) = \cos\left(\ln(1 - x^2)\right)$

13. 1) $y(x) = \dfrac{5}{6 \cdot \sqrt[5]{x^6}}$, 2) $y(x) = \cos^3(4x/3)$,

3) $y(x) = ctg\left(e^{7x}\right)$

14. 1) $y(x) = \dfrac{3}{7 \cdot \sqrt[3]{x^7}}$, 2) $y(x) = ctg^4(x/4)$,

3) $y(x) = \arcsin\left(\sqrt[3]{4 - 5x}\right)$

15. 1) $y(x) = \dfrac{3}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$, 2) $y(x) = \ln^5(x/5)$,

3) $y(x) = \exp\left(\arcsin(2x - 4)\right)$

16. 1) $y(x) = \dfrac{5}{7 \cdot \sqrt[5]{x^7}}$, 2) $y(x) = \arcsin^4(5x/3)$,

3) $y(x) = \ln(x - \cos(3x))$

17. 1) $y(x) = \dfrac{4}{5 \cdot \sqrt[4]{x^5}}$, 2) $y(x) = \arccos^4(5x/3)$,

3) $y(x) = \sin\left(\ln(x^3 + 1)\right)$

18. 1) $y(x)=\dfrac{6}{5\cdot\sqrt[6]{x^5}}$, 2) $y(x)=arcctg^5(2x/5)$,

3) $y(x)=tg\left(e^{5-2x}\right)$

19. 1) $y(x)=\dfrac{7}{6\cdot\sqrt[7]{x^6}}$, 2) $y(x)=arctg^3(4x/3)$,

3) $y(x)=\ln\left(2-\cos^2(x)\right)$

20. 1) $y(x)=\dfrac{5}{4\cdot\sqrt[5]{x^4}}$, 2) $y(x)=\sin^4\left(e^x/4\right)$,

3) $y(x)=\ln\left(3x^2-tg(2x)\right)$

3 КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл. Его свойства

Функция $F(x)$называется *первообразной* для функции $f(x)$ в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x) \Longrightarrow dF = f(x)dx, a \le x \le b.$$

Интегрирование – это процесс нахождения первообразных.

Множество первообразных для данной функции f(x) называется *неопределенным интегралом* и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C, C = const.$

Примеры:

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int 3x^3 dx = \frac{3x^4}{4} + C$$

$$\int 2xdx = x^2 + C$$

<u>Таблица неопределенных интегралов</u>

1. $\int 0 \cdot dx = C.$
2. $\int dx = x + C.$
3. $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \left(k \ne -1, k - const\right).$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \left(a > 0, a \ne 1\right).$
6. $\int e^x dx = e^x + C.$
7. $\int \sin xdx = -\cos x + C.$
8. $\int \cos xdx = \sin x + C.$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$
12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\,\frac{x}{a} + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$

<u>Свойства неопределенного интеграла:</u>

1. Если a – постоянная величина, то $\int a \cdot f(x)dx = a \int f(x)dx$.
2. $\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$
3. $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$.
4. $[\int f(x)dx]' = f(x)$.
5. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Определенный интеграл

Разность $F(b) - F(a)$ называется *определенным интегралом* от функции *f(x)* и обозначается $\int_a^b f(x)dx$, где $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$.

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ - формула Ньютона – Лейбница.

Пример.

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

<u>Свойства определенного интеграла аналогичны свойствам неопределенного интеграла</u>.

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, k - число.$
3. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$
4. $|\int_a^b f(x)dx| = \int_a^b |f(x)|dx$
5. $\forall c \in [a,b] \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Дифференциальные уравнения

Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и производные этой функции, т.е. уравнение вида $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$.

Если искомая функция $y = y(x)$ есть функция одной переменной x, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Например,

1. $x^3y' - 3xy^2 = 2y$ – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.
2. $y'' - xy' = x^3$ – дифференциальное уравнение второго порядка.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$ или$y' = f(x; y)$. Решением дифференциального уравнения на интервале $(a; b)$ называется функция$y = \varphi(x)$, определенная на интервале $(a; b)$ вместе со своими производными, и такая, что подстановка функции$y = \varphi(x)$ в дифференциальное уравнение превращает последнее в тождество по xна $(a; b)$.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* дифференциального уравнения. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$ в области D называется функция$y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами:

1) эта функция является решением дифференциального уравнения при любом значении произвольной постоянной C, принадлежащей некоторому множеству;

2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ такого, что $(x_0, y_0) \in D$, существует единственное $C = C_0$, при котором решение удовлетворяет заданному начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$называется такое решение $y = \varphi(x_0, C)$, которое получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при некотором частном значении произвольной постоянной C.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x; y)$ состоит в том, чтобы найти решение, которое при заданном значении аргумента $x = x_0$ принимает заданное значение $y = y_0$, т.е. удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$.Другими словами, задача Коши состоит в нахождении частного решения.

Геометрически задача Коши формулируется следующим образом: среди всех интегральных кривых данного дифференциального уравнения выделить ту, которая проходит через заданную точку $(x_0; y_0)$.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

1. Дифференциальное уравнение вида

$$f(x)dx = g(y)dy \qquad (1)$$

называется *уравнением с разделёнными переменными*. После интегрирования уравнения (1) его общее решение получается в неявном виде:

$$F(x) = G(y) + C,$$

где $F(x)$ и $G(y)$ – первообразные соответственно для функций $f(x)$ и g(y), - произвольная постоянная.

2. Дифференциальноеуравнениевида

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \qquad (2)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Делим на $f_2(x)g_1(y)(f_2(x \neq$ *0, g1(y)≠0*уравнение *(2)*.Получаем

$$\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} = 0,$$

$$\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}.$$

Интегрируем обе части равенства

$$\int \frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} = -\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}.$$

Однородные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1)$$

называется *однородным* уравнением. Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$u = \frac{y}{x} (2)$$

Откуда

$$y = ux, y' = u'x + u, \qquad (3)$$

где u – новая неизвестная функция от x, u' - ее производная по x.

Подставляем (2) и (3) в (1)

$$u'x + u = f(u),$$

$$u'x = f(u) - u,$$

т. к.

$$u' = \frac{dy}{dx},$$

то

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u,$$

$$xdu = (f(u) - u)dx.$$

Делим на $x \neq 0$

$$du = \frac{(f(u) - u)dx}{x}.$$

Делим на $f(u) - u \neq 0$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = ln|x| + C.$$

Линейные дифференциальные уравнения. Уравнение Бернулли

1. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение, содержащее неизвестную функцию и ее производную в первой степени:

$$y' + p(x)y = f(x) \qquad (1)$$

2. *Уравнением Бернулли* называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

(при $\alpha = 0$ это уравнение является линейным, при $\alpha = 1$ - уравнением с разделяющимися переменными). В (1) и (2) $p(x)$ и $f\ (x)$ - заданные функции.

Оба типа уравнений можно решать методом Бернулли с помощью подстановки

$$y = uv, y' = u'v + uv',$$

где uи v – новые неизвестные функции от x, u' и v' - их производные по x.

Рассмотрим решение линейного уравнения.

Подстановка выражений для yиy' в уравнение (1) приводит его к виду

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x),$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x).$$

В качестве v выбираем одну из функций, удовлетворяющих уравнению

$$v' + p(x)v = 0, \quad (3)$$

тогда функция u определяется из уравнения

$$u'v = f(x). \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) – уравнения с разделяющимися переменными.

Рассмотрим решение уравнения (3).

$$v' + p(x)v = 0, v' = \frac{dv}{dx},$$

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v,$$

$$dv = -p(x)vdx, v \neq 0,$$

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx,$$

$$ln|v| = -\int p(x)dx,$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}. \quad (5)$$

Подставим (5) в (4), найдем функцию u.

Дифференциальные уравнения второго порядка

Мы перейдем теперь к изучению дифференциальных уравнений вида

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Обычно рассматривают уравнения, разрешенные относительно производной

$$y'' = f(x, y, y').$$

Начнем с уравнения $y'' = x$.

Последовательно интегрируя, найдем сначала первую производную:$y' = \frac{x^2}{2} + C_1$, а затем и саму функцию:

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) dx = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Так как мы интегрировали дважды, то и получили две произвольные постоянные, которые обозначили C_1, C_2.

Дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ имеет бесчисленное множество решений, которые задаются формулой $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, содержащей две произвольные постоянные. Эта совокупность решений называется общим решением.

Частное решение уравнения отыскивается при помощи задания начальных условий

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0{}'.$$

Геометрический смысл начальных условий заключается в том, что помимо точки $(x_0; y_0)$ через которую должна проходить интегральная кривая, мы задаем еще угловой коэффициент касательной $(y_0{}')$ к этой кривой. Отметим, что так как общее решение уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных, то через данную

точку проходит бесчисленное множество интегральных кривых, лишь одна из которых имеет данный угловой коэффициент.

Частные случаи уравнений второго порядка

Возьмем дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y').$$

И рассмотрим частные случаи, легко приводимые к дифференциальным уравнениям первого порядка.

1. Правая часть уравнения не содержит y и y':$y'' = f(x)$.

Так как $y'' = (y')'$то

$$y' = \int f(x)dx + C_1.$$

Интегрируя еще раз, будем иметь:

$y = \int(\int f(x)dx + C_1)\, dx + C_2$, где C_1, C_2- произвольные постоянные.

2. Правая часть уравнения не содержит y:

$y'' = f(x, y')$. $(*)$

Положим$y' = z, y'' = z'$ и уравнение $(*)$обращается в уравнение первого порядка относительно z:

$$z' = f(x, z).$$

Найдя решение этого уравнения, $z = \varphi(x, C_1)$, мы искомое решение получим интегрированием равенства$y' = z$ т.е.

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

3. Правая часть уравнения не содержит x:

$$y'' = f(y, y').$$

Положим $y' = p$ и будем считать pфункцией от y. Дифференцируя это равенство, получим

$$y'' = \frac{dp}{dx}.$$

Чтобы исключить x, произведем следующее преобразование:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p.$$

Таким образом,

$$y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Подставив в уравнение, будем иметь:

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

т.е. уравнение первого порядка относительно p как функции от y.

Решив его, найдем $p = \varphi(y, C_1)$. Тогда искомое решение получим из уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = p = \varphi(y, C_1),$$

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx,$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Линейные дифференциальные уравнения.

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение первой степени относительно неизвестной функции и ее производных.

Мы будем записывать его в виде

$y'' + a_1 y' + a_2 y = f\ (x),$ $(*)$

где a_1, a_2- функции независимой переменной x или постоянные величины.

Функция $f\ (x)$называется правой частью уравнения.

Если функция $f\ (x)$тождественно равна нулю, то уравнение $(*)$ называется линейным уравнением без правой части (или однородным). В противном случае уравнение $(*)$называется линейным уравнением с правой частью (или неоднородным).

1. Линейные уравнения без правой части, т.е.

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$ $(**)$

Теорема. Если $y_1(x), y_2(x)$ - решения линейного уравнения $(**)$, то функция$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$при любых постоянных C_1, C_2также является решением уравнения.

На основе доказанной теоремы мы можем сделать следующий вывод о структуре общего решения линейного уравнения без правой части $(**)$.

Если y_1, y_2- решения уравнения $(**)$ такие, что их отношение не равно постоянной величине, то линейная комбинация этих функций

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ $(***)$

является общим решением уравнения.

В предыдущей теореме мы доказали, что функция $(***)$ является решением линейного уравнения без правой части, а так как она содержит две произвольные постоянные, то она и является общим решением.

Зная общее решение уравнения, мы можем по заданным начальным условиям отыскивать соответствующее частное. Пусть, например, заданы начальные условия

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0{}',$

причем в точке x_0коэффициенты a_1, a_2непрерывны. Подставляя эти значения в выражение для общего решения и его производной, получим систему линейных уравнений относительно C_1, C_2:

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0, C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = y_{0'}.$$

Для того чтобы из общего решения можно было получить любое частное, надо проверить, что полученная система имеет решение при любых начальных данных$y_0, y_0{}'$.

Для этого определитель системы должен быть отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. Линейные уравнения с правой частью.

Пусть дано линейное уравнение второго порядка с правой частью

$y'' + a_1 y' + a_2 y = f\ (x)$ (*

Уравнение без правой части

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$ $(**)$

получающееся из данного уравнения $(*)$, если вместо свободного члена$f\ (x)$взять нуль, назовем соответствующим уравнению $(*)$.

Теорема. Общее решение уравнения с правой частью $(*)$можно составить как сумму общего решения соответствующего уравнения без правой части $(**)$ и какого-нибудь частного решения данного уравнения $(*)$.

Итак, для того чтобы найти общее решение уравнения с правой частью, нужно найти общее решение соответствующего уравнения без правой части и лишь одно какое-нибудь частное решение заданного уравнения. Это можно записать так:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \varphi(x),$$

Гдеy_1, y_2 - частные решения соответствующего уравнения без правой части, а $\varphi(x)$ - частное решение уравнения с правой частью.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1)$$

где постоянные $p, q \in \mathbb{R}$.

Найдем общее решение такого уравнения.

Будем искать частное решение уравнения (1)в форме $y = e^{kx}$, где k -постоянное число, подлежащее определению.

Имеем:$y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}$.

Следовательно, должно иметь место тождество

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

или, так как $e^{kx} \neq 0$,то $k^2 + pk + q = 0$.

Уравнение

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (2)$$

называется *характеристическим уравнением* для уравнения (1).

В зависимости от корней k_1 и k_2характеристического уравнения (2) получаем общее решение уравнения (1) в виде

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}, \qquad (3)$$

если k_1 и k_2 - различные действительные числа;

$$y = (C_1 + C_2x)e^{k_1x}, \qquad (4)$$

если $k_1 = k_2$;

$$y = e^{\alpha x}(C_1cos\beta x + C_2sin\beta x), \qquad (3)$$

если $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i$ - комплексные числа, C_1, C_2– произвольные постоянные.

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$a_0y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$a_0k^3 + a_1k^2 + a_2k + a_3 = 0.$$

Если корни действительные и$k_1 \neq k_2 \neq k_3$, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + C_3e^{k_3x}.$$

Если корни действительные и$k_1 = k_2 \neq k_3$, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_2x} + C_3e^{k_3x}.$$

Если корни действительные и$k_1 = k_2 = k_3$, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_2x} + C_3x^2e^{k_3x}.$$

Если корни действительные и$k_1 -$ действительное число, $k_{2,3} = \alpha \pm i\beta$, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^{k_1x} + e^{\alpha x}(C_2cos\beta x + C_3sin\beta x).$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (*)$$

1. Пусть правая часть уравнения $(*)$ имеет вид

$$f(x) = P(x)e^{mx},$$

где $P(x)$ многочлен. Тогда уравнение $(*)$имеет частное решение вида

$$y = x^nQ(x)e^{mx},$$

где $Q(x)$-многочлен той же степени, что и $P(x)$, причем если число m не является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, то $n = 0$, а если является, тоn–кратность этого корня.

2. Пусть правая часть уравнения $(*)$ имеет вид

$$f(x) = acosnx + bsinnx.$$

Если числа $\pm in$не являются корнями характеристического уравнения, то уравнение имеет частное решение вида $y = Acosnx + Bsinnx$.

Если же числа $\pm in$ служат корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид $y = x(Acosnx + Bsinnx)$.

3. Если правая часть уравнения $(*)$ имеет вид

$$f(x) = e^{mx}(P_1(x)cosnx + P_2(x)sinnx),$$

Где$P_1(x), P_2(x)$ -многочлены, а числа $m \pm in$не являютсякорнями характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y = e^{mx}(R_1(x)cosnx + R_2(x)sinnx),$$

где$(R_1(x), (R_2(x)$ -многочлены степени, равной высшей из степеней многочленов $P_1(x), P_2(x)$.

Если числа $m \pm in$являются корнями характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y = xe^{mx}(R_1(x)cosnx + R_2(x)sinnx).$$

4. Если правая часть $f\ (x)$ уравнения $(*)$ равна сумме функций

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_2(x)$$

и $\varphi_i(x)$ - частные решения уравнений

$y'' + py' + qy = f_i(x), (i = 1,2, \ldots, p)$ соответственно, то сумма

$\varphi = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_p(x)$ есть частное решение уравнения $(*)$.

Примеры.

1. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{y}{x}$$

Решение.

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

Отсюда имеем

$$dy = \frac{y}{x}dx$$

Предположим, что $y \neq 0$. Разделим на y.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, будем иметь

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

или

$$ln|y| = ln|x| + ln|C|.$$

Потенцируя последнее равенство, окончательно получим $y = Cx$.

2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение. $(1 + x^2)dy - 2xydx = 0$.

Найти частное решение, удовлетворяющее условию: $y = 1$ при $x = 0$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на произведение $y(1 + x^2)$, получим уравнение

$$\frac{dy}{y} - \frac{2xdx}{1+x^2} = 0.$$

Интегрируем.

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{2xdx}{1+x^2} = 0,$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = 0,$$

$$ln|y| - \ln(x^2+1) = ln|C|.$$

Откуда получаем общее решение

$$y = C(1+x^2).$$

Чтобы найти искомое частное решение, достаточно определить значение произвольной постоянной по начальным условиям.

$1 = C(1+0),\ C = 1.$

Следовательно, частное решение имеет вид

$$y = 1 + x^2.$$

3. Найти общее решение уравнения.

$$xy' \cdot cos\frac{y}{x} = ycos\frac{y}{x} - x.$$

Решение. Разделим данное уравнение относительно производной y':

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{cos\frac{y}{x}}.$$

Правая часть уравнения зависит от отношения

$$\frac{y}{x},$$

следовательно, данное уравнение является однородным.

Введем новую функцию t:

$$t = \frac{y}{x}.$$

Тогда $y = tx, y' = t'x + t.$

Подставляем полученное выражение в уравнение, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$t'x + t = t - \frac{1}{cost}$$

или

$$t'x = -\frac{1}{cost}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\frac{dt}{dx}x = -\frac{1}{cost},$$

$$costdt = -\frac{dx}{x},$$

$$\int costdt = -\int \frac{dx}{x},$$

$$sint + ln|x| = C.$$

Подставив вместо t его значение, получим общий интеграл.

$$sin\frac{y}{x} + ln|x| = C.$$

4. Решить дифференциальное уравнение

$$(x+y)dx + xdy = 0.$$

Решение. Решим уравнение относительно производной y'.

$$\frac{x+y}{x}+y'=0,$$
$$y'=-\frac{x+y}{x},$$
$$y'=-1-\frac{y}{x}.$$
Правая часть уравнения зависит от отношения
$$\frac{y}{x},$$
следовательно, данное уравнение является однородным.
Введем новую функцию t:
$$t=\frac{y}{x}.$$
Тогда $y=tx,\ y'=t'x+t$.Подставляем полученное выражение в уравнение:
$$t'x-t=-1-t,$$
$$t'x=-1-2t,$$
$$\frac{dt}{dx}x=-1-2t,$$
$$\frac{dt}{2t+1}=-\frac{dx}{x},$$
$$\int\frac{dt}{2t+1}=-\int\frac{dx}{x},$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{d(2t+1)}{2t+1}=-\int\frac{dx}{x},\int\frac{d(2t+1)}{2t+1}=-2\int\frac{dx}{x},$$
$$ln|2t+1|=-2ln|x|+lnC,$$
$$ln|2t+1|=ln\frac{1}{x^2}+lnC,$$
$$2t+1=\frac{C}{x^2},$$
$$2\frac{y}{x}+1=\frac{C}{x^2},$$
и, следовательно,
$$2\frac{y}{x}=\frac{C}{x^2}-1,$$
$$2y=\frac{C}{x}-x,$$
$$y=\frac{C}{2x}-\frac{x}{2}.$$
5. Найти общее решение линейного уравнения $xy'-y=x^3$.
Решение. Положим $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$.
$$x(u'v+uv')-uv=x^3 \qquad :x\neq 0,$$
$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=x^2,$$
$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=x^2.$$
Выберем v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, тогда
$$v'-\frac{v}{x}=0,$$
$$\frac{dv}{dx}-\frac{v}{x}=0,$$
$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x},$$

$$dv = \frac{v}{x}\,dx,$$
$$\frac{dv}{dv} = \frac{dx}{x},$$
$$\int \frac{dv}{dv} = \int \frac{dx}{x},$$
$$ln|v| = ln|x| \Longrightarrow v = x.$$
$$u'v = x^2,$$
$$u'x = x^2,$$
$$\frac{du}{dx}x = x^2, \qquad : x \neq 0,$$
$$\frac{du}{dx} = x,$$
$$du = xdx,$$
$$\int du = \int xdx,$$
$$u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Следовательно, $y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x$.

6. Найти частное решение уравнения$y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1$.

Решение.

$$y = uv, y' = u'v + uv'.$$
$$u'v + uv' + \frac{3}{x}uv = \frac{2}{x^3},$$
$$u'v + u\left(v' + \frac{3}{x}v\right) = \frac{2}{x^3},$$
$$v' + \frac{3}{x}v = 0,$$
$$\frac{dv}{dx} = -\frac{3v}{x},$$
$$\frac{dv}{v} = -\frac{3dx}{x},$$
$$\int \frac{dv}{v} = -3\int \frac{dx}{x},$$
$$ln|v| = -3ln|x|,$$
$$ln|v| = ln\left|\frac{1}{x^3}\right|,$$
$$v = \frac{1}{x^3},$$
$$u'v = \frac{2}{x^3},$$
$$u'\frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3},$$
$$u' = 2,$$
$$\frac{du}{dx} = 2,$$
$$du = 2dx,$$
$$\int du = 2\int dx,$$
$$u = 2x + C,$$

$$y = (2x + C)\frac{1}{x^3},$$
$$1 = (2 + C) \cdot 1,$$
$$2 + C = 1,$$
$$C = -1,$$
$$y = (2x - 1)\frac{1}{x^3}.$$

6. Решить уравнение

$$y'' + \frac{y'}{x} = x.$$

Решение. Полагая $y' = z,\ y'' = z$, приходим к уравнению первого порядка

$$z' + \frac{z}{x} = x.$$

Уравнение является линейным.

$$z = uv, y' = u'v + uv'.$$
$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x,$$
$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x,$$
$$v' + \frac{v}{x} = 0,$$
$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x},$$
$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$
$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$$
$$ln|v| = -ln|x|,$$
$$v = \frac{1}{x},$$
$$u'v = x,$$
$$\frac{du}{dx}\frac{1}{x} = x,$$
$$du = x^2 dx,$$
$$\int du = \int x^2 dx,$$
$$u = \frac{x^3}{3} + C_1,$$
$$z = \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)\frac{1}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

Тогда

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x},$$
$$y = \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}\right) dx = \frac{x^3}{9} + C_1 ln|x| + C_2.$$

7. Решить уравнение

$$2yy'' + y'^2 = 0.$$

Решение.

Полагая

$$y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy},$$

получим:

$$2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y},$$

$$\int\frac{dp}{p} = -\int\frac{dy}{2y},$$

$$ln|p| = -\frac{1}{2}ln|y| + ln|C_1|,$$

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{y}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}},$$

$$\sqrt{y}dy = C_1dx,$$

$$\int\sqrt{y}dy = C_1\int dx,$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1x + C_2.$$

8. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 5y^{/} + 6y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение для данного уравнения принимает вид

$$k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Т.к.$k_1 = 2, k_2 = 3$, то в соответствии с формулой (3) общее решение данногодифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 4 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = -2$.

В соответствии с формулой (4) получаем общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2x).$$

10. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + y' + y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + k + 1 = 0$.Найдем корни этого уравнения.

$$D = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 1 - 4 = -3,$$

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3\cdot i^2}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, i^2 = -1,$$

$$k_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, k_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В соответствии с формулой (5) находим общее решение

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения.

$$y'' + y' - \frac{3}{4}y = 0,\ \ y(0) = 6,\ y'(0) = 1.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + k - \frac{3}{4} = 0$.

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{2} = \frac{-1 \pm 2}{2} \implies k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -\frac{3}{2}.$$

Т.к. корниk_1 и k_2 - различные действительные, то общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{3}{2}x}$$

Найдем частное решение.

Подставим в общее решение первое начальное условие:

$$y(0) = 6 \ \Rightarrow C_1 + C_2 = 6.$$

Чтобы составить второе уравнение, продифференцируем общее решение и воспользуемся вторым начальным условием:

$$y' = \frac{1}{2}C_1 e^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{2}C_2 e^{-\frac{3}{2}x},$$

$$y'(0) = 1 \ \Rightarrow \frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 = 1.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6, \\ \frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 6, \\ C_1 - 3C_2 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 5, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Подставив найденные значения постоянных в общее решение, получим частное решение

$$y = 5e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{3}{2}x}.$$

12. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^3 + 2k^2 + k = 0.$$

и находим его корни:

$$k(k^2 + 2k + 1) = k(k+1)^2 = 0 \implies k_1 = 0, k_{2,3} = -1.$$

Следовательно, уравнение имеет три действительных корня, причем два из них равные.

Общее решение уравнения

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$$

Где C_1, C_2, C_1- произвольные постоянные.

13. Решить уравнение

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Решение.Составим характеристическое уравнение

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0.$$

Преобразуя левую часть уравнения, получим

$$k^2(k-2) - (k-2) = 0, (k-2)(k^2 - 1) = 0,$$

Откуда $k_1 = -1,\ k_2 = 1,\ \ k_3 = 2.$

Получаем общее решение уравнения

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}.$$

14 Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 1 + x.$$

Решение. Найдем общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

имеет двукратный корень $k = 11$. Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

Правая часть имеет рассматриваемую форму, причем $m = 0, P(x) = 1 + x$.

Так как число 0не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y = Ax + B, \text{где } A, B - \text{постоянные}.$$

Дифференцируя и подставляя в дифференциальное уравнение, находим коэффициенты:

$$y' = A,\ y'' = 0.$$

$$-2A + Ax + B = 1 + x.$$

Приравнивая коэффициенты в обеих частях равенства

$$A = 1, -2A + B = 1,$$

Получим

$A = 1, B = 3.$

Итак, частным решением заданного уравнения является функция

$$y = x + 3,$$

а его общим решением – функция

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + x + 3.$$

15. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 13y = 5sin2x.$$

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 13 = 0$имеет корни $k_{1,2} = -2 \pm 3i$.

Значит, общее решение соответствующего уравнения без правой части запишется так:

$$y = e^{-2x}(C_1 cos3x + C_2 sin3x).$$

Так как числа $\pm 2i$не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = Acos2x + Bsin2x.$$

Дважды дифференцируем:

$$y' = 2Asin2x + 2Bcos2x,$$

$$y'' = -4Acos2x - 4Bsin2x$$

и подставляем в уравнение:

$-4Acos2x - 4Bsin2x - 8Asin2x + 8Bcos2x + 13Acos2x + 13Bsin\,2x = 5sin2x.$

Приравнивая друг другу коэффициенты при $sin2x, cos2x$в обеих частях равенства, получим:

$$\begin{cases} -8A + 9B = 5, \\ 9A + 8B + 0. \end{cases}$$

Отсюда$A = -\frac{8}{29}, B = \frac{9}{29}$, т.е. частным решением будет функция

$$-\frac{8}{29}cos2x + \frac{9}{29}sin2x,$$

аобщим

$$y = e^{-2x}(C_1 cos3x + C_2 sin3x) - \frac{8}{29}cos2x + \frac{9}{29}sin2x.$$

16. Найти общее решение уравнения

$$y' + y = 4xsinx.$$

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения

$$y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$.

Корни характеристического уравнения$k_{1,2} = \pm i$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 cosx + C_2 sinx.$$

Частное решение ищем в виде

$$y = x[(Ax + B)cosx + (Cx + D)sinx].$$

Имеем:

$$y' = (Ax + B)cosx + (Cx + D)sinx + x[Acosx - (Ax + B)sinx + Csinx + (Cx + D)cosx]$$

$$y'' = Acosx - (Ax + B)sinx + C\ sinx + (Cx + D)cosx + Acosx - (Ax + B)sinx + Csinx +$$
$$+(Cx + D)cosx + x[-Asinx - Asinx - (Ax + B)cosx + Ccosx + Ccosx - (Cx + D)sinx]$$
$$= [-Ax^2 + (4C - B)x + (2A + 2D)]cosx$$
$$+ [-Cx^2 - (4A + D) + (2C - 2B)]sinx.$$

Подставляя в уравнение, находим:

$$[2Cx + (A + D)]cosx + [-2Ax + (C - B)]sinx = 2xsinx.$$

Это равенство будет тождественным только при

$$2C = 0, A + D = 0, -2A = 2, C - B = 0.$$

Отсюда$A = -1, B = 0, C = 0, D = 1$.

Следовательно, получаем частное решение

$$y = x(sinx - xcosx).$$

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 cosx + C_2 sinx + x(sinx - xcosx).$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти частное решение.

1) $y' = 4x^3$; $y = 0$ при $x = 0$.

2)$(x^2 + 4)y' - 2xy = 0$; $y = 5$ при $x = 1$.

3)$xy' = \frac{y}{lnx}$; $y = 1$ при $x = e$.

4)$y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y = 1$ при $x = 0$.

5) $y' = y^2$; y = 1 при x = -1.

6) $y' \cdot tgx - y = 1$; $y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

1) $(x + 3)dy - (y + 3)dx = 0$.

2)$y' = \frac{4}{x^2-4}$.

3)$(xy^2 + x)dx + (y + x^2 y)dy = 0$.

4) $y' = y^2 cosx$.

5) $sinxdx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$.

6) $dr - rctg\varphi d\varphi = 0$.

3. Найдите общее решение однородного дифференциального уравнения.

1) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

2) $(x - y)dy - ydx = 0$.

3) $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$.

4) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

5) $xy' = xsin\frac{y}{x} + y$.

6) $xy' + \sqrt{x^2 + y^2} = y$.

7) $xy' - y = xcos\frac{y}{x}$.

8) $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$.

4. Решите линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

1) $y' + y = 2$.

2) $y' - \frac{2}{x}y = 2x^4$.
3) $xy' - 3y = x^4$.
4) $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$.
5) $x' - 3x = e^{-t}$.
6) $y' + 2xy = 2xe^{x^2}$.
7) $y'cosx + ysinx = 1$.
8) $(x+1)y' + y = cosx$.

5. Найдите решение линейного дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию.

1) $y' - 2y = 1, y(0) = \frac{1}{2}$.
2) $y' - \frac{3}{x}y = x, y(1) = 1$.
3) $2y' - y = e^x, y(0) = 5$.
4) $\frac{dy}{dx} - 2xy = e^{x^2}, y(2) = 0$.
5) $x(y' - xcosx) = y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.
6) $xy' + y = sinx, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$.
7) $x^2y' + 2xy = -4, y(-1) = 0$.

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$.
2) $y'' - 2y' - 8y = 0$.
3) $y'' + 3y' + 2y = 0$.
4) $y'' - 4y' = 0$.
5) $y'' - 2y' + y = 0$.
6) $y'' + 8y' + 16y = 0$.
7) $y'' - 4y' + 13y = 0$.
8) $y'' + 6y' + 25y = 0$.
9)$y'' + 9y = 0$.
10) $y'' - 16y = 0$.

7. Решите задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка.

1) $2y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -1$.
2) $y'' + 4y = 0, y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1, y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2$.
3) $y'' - 6y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 6$.
4) $9y'' - 2y' + 10y = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{9}$.
5) $y'' - 12y' + 37y = 0, y(2\pi) = 1, y'(2\pi) = 6$.

8. Решите линейное дифференциальное уравнение третьего порядка.

1) $y''' - 7y'' + 15y' = 0$.
2) $y''' - 8y = 0$.
3) $y''' - 4y'' + y' - 4y = 0$.
4) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$.
5) $y''' - 3y'' - 2y = 0$.
6) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
7) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

9. Решите линейное неоднородное дифференциальное уравнение.

1) $7y'' + 15y' = 3e^x$.
2) $y'' - 8y = 2x^2 - 1$.
3) $4y'' + y' - 4y = x - 4$.
4) $7y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$.

5) $y'' - 3y' - 2y = sinx$.
6) $3y'' + 3y' - y = cos2x$.
7) $6y'' + 11y' - 6y = xe^x$.

Комплексные числа

Комплексные числа и формы их записи

Комплексное число – это выражение вида:

$$z = x + iy \qquad (1.1)$$

Гдеx– действительная часть, обозначается $x = Rez$;y– мнимая часть, обозначается $y = Imz$;i – мнимая единица, такая, что:

$$i^2 = -1 \text{ или } i = \sqrt{-1}. \qquad (1.2)$$

Формула (1.1) называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Комплексное число, как некоторую точку$M(x; y)$ на комплексной плоскости, можно задать радиус-вектором ρ и углом поворота φ этого вектора (рис.1).

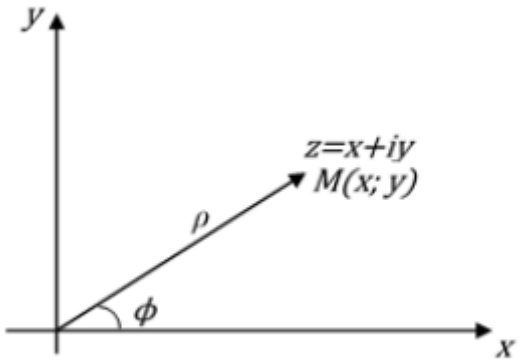


Рис. 1

Применяя формулы перехода из декартовой системы координат в полярную систему

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi, \\ y = \rho sin\varphi, \end{cases} \qquad (1.3)$$

получим комплексное число, записанное через тригонометрические функции, т.е. в тригонометрической форме:

$$z = x + iy = \rho cos\varphi + isin\varphi = \rho(cos\varphi + isin\varphi), \qquad (1.4)$$

где ρ- модуль комплексного числа $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi$- аргумент комплексного числа $\varphi = Argz = argz + 2\pi k$, где к ∈ ℕ.

Формулы перехода от декартовых координат к полярным, задаются соотношениями:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{где } 0 \le \rho < +\infty, \qquad (1.5)$$

$$\varphi = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0,\ \ y \ge 0; \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0,\ \ y < 0; \end{cases} \qquad (1.6)$$

где $0 \le \varphi \le 2\pi$ или $-\pi \le \varphi \le \pi$.

Применяя к тригонометрической форме записи комплексного числа формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi \qquad (1.7)$$

получим показательную или экспоненциальную форму записи комплексного числа:

$$z = \rho(cos\varphi + isin\varphi) = \rho e^{i\varphi} \qquad (1.8)$$

Для каждого комплексного числа z определено комплексно сопряженное число $\bar{z}$ и определяемое формулами:

$$\left[\begin{array}{l} \bar{z} = x - iy, \\ \bar{z} = \rho(cos\varphi - isin\varphi), \\ \bar{z} = \rho e^{i\varphi}. \end{array}\right. \quad (1.9)$$

Важно знать, что

$$\bar{z}z = |z|^2 = \rho^2 \quad (1.10)$$

При вычислениях и доказательствах некоторых комплексных тождеств полезны следующие формулы:

$$Rez = \frac{z + \bar{z}}{2}, Imz = \frac{z - \bar{z}}{2i} = i\frac{\bar{z} - z}{2}.$$

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

1. Сложение и вычитание

Действие сложения и вычитания комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ производится по правилу сложения и вычитания двучленов

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \quad (2.1)$$

2. Умножение.

Действие умножение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ производится по правилу умножения двучленов

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (2.2)$$

3. Деление.

Чтобы преобразовать дробь $\frac{z_1}{z_2}$ в комплексное число, необходимо числитель и знаменатель дроби умножить на число сопряжённое к знаменателю, в числителе произвести действие умножения, а для знаменателя воспользоваться формулой (1.10)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \quad (2.3)$$

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической или в показательной форме

1. Умножение:

При умножении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической или показательной формах, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, ar\,g(z_1 z_2) = argz_1 + argz_2,$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (3.1)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)\big) \quad (3.2)$$

2. Деление:

При делении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической или показательной формах, их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, ar\,g\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = argz_1 - argz_2.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (3.4)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)\big) \quad (3.5)$$

3. Возведение в степень.

Для возведения комплексного числа в целую положительную степень n применяют формулу Муавра:

$$z^n = \rho^n(cosn\varphi + isinn\varphi) \quad (3.6)$$

Данная формула является следствием формулы (3.2).

4. Извлечение корня порядка n.

Для извлечения корня используем формулу:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (3.7)$$

где к $= 0,1, \dots, n-1$.

Точки, соответствующие $\sqrt[n]{z}$ являются вершинами правильногоn– угольника, вписанного в окружность с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt[n]{\rho}$.

Способ построения для $\sqrt[4]{z}$ (рис.2):

1) Из начала координат описываем окружность радиуса $R = \sqrt[n]{z}$.

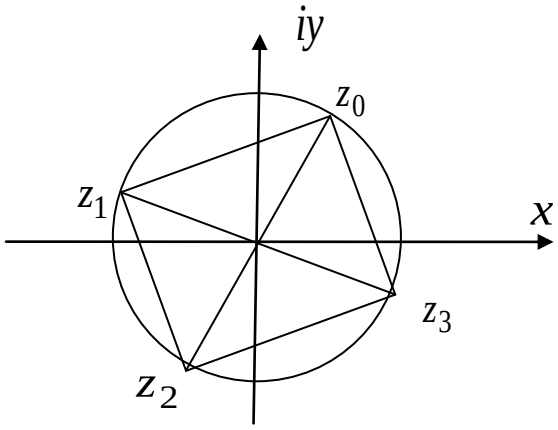


Рис. 2

2) Если $argz = \varphi$ то из начала координат проводим луч под углом $\frac{\varphi}{n}$к положительному направлению Ox. Пересечение луча с окружностью дает точку z_0.

3) Вписываем в окружность правильный n– угольник, одна из вершин которого найденная точка z_0. Точки пересечения n– угольника и окружности есть решения $z_1, \dots, z_{n-1}$.

Примеры.

1. Изобразить комплексные числаz_1 и z_2на комплексной плоскости, если

$$z_1 = 3 - 4i, z_2 = -7 + 2i.$$

Решение. Для каждого комплексного числа выпишем действительнуюx и мнимуюy части согласно формуле (1.1):

$$x_1 = Rez_1 = 3, y_1 = Imz_1 = -4, x_2 = Rez_2 = -7, y_2 = Imz_2 = 2.$$

На комплексной плоскости отметим две точки с соответствующими координатами: $z_1(3;\ -4), z_2(-7; 2)$ (рис.3).

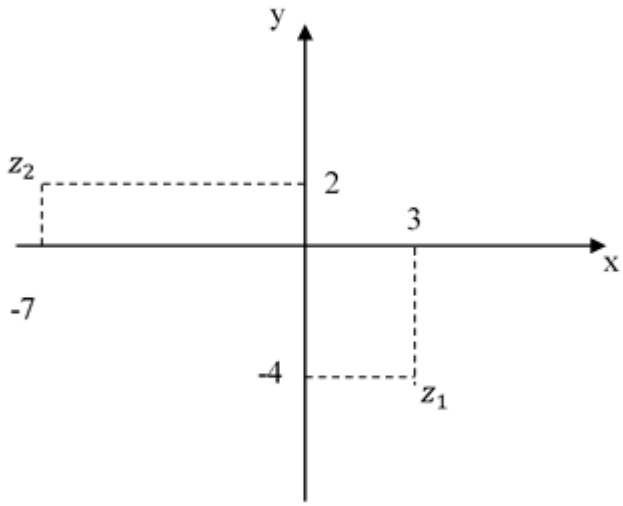


Рис. 3

2. Возвести комплексное числоz в квадрат, если:$z = 5 - 7i$.

Решение. Воспользуемся формулой сокращенного умножения$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, тогда $z^2 = (5 - 7i)^2 = 25 - 70i + 49i^2$.

Применяя формулу (1.2) к последнему слагаемому, окончательно получаем$z^2 = -24 - 70i$.

3. Найти аргумент комплексных чисел z_1иz_2,если:$z_1 = 2 - 2i, z_2 = -7\sqrt{3} + 7i$.

Решение. Для нахождения аргумента комплексного числа воспользуемся формулой (1.6). Определим действительныеx и мнимыеy части заданных комплексных чисел:

$$x_1 = 2, y_1 = -2, x_2 = -7\sqrt{3}, y_2 = 7.$$

Для числаz_1: $x_1 > 0, y_1 < 0$, следовательно

$$\varphi_1 = argz_1 = arctg\frac{y_1}{x_1} = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Для числаz_2: $x_2 < 0, y_2 > 0$, следовательно

$$\varphi_2 = argz_2 = \pi + arctg\frac{7}{-7\sqrt{3}} = \pi - arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

4. Выполнить действия$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $z_1 : z_2$, если известно, что:$z_1 = 3 - 4i, z_2 = -5 + 6i$.

Решение. Рассматривая комплексные числа как двучлены выполним действия сложения, вычитания и умножения:

$$z_1 + z_2 = (3 - 4i) + (-5 + 6i) = 3 - 5 - 4i + 6i = -2 + 2i;$$
$$z_1 - z_2 = (3 - 4i) - (-5 + 6i) = 3 + 5 - 4i - 6i = 8 - 10i;$$
$$z_1 z_2 = (3 - 4i)(-5 + 6i) = 3 \cdot (-5) + 3 \cdot 6i + (-4i) \cdot (-5) + (-4i) \cdot 6i = 9 + 38i.$$

Найдем отношение

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 4i}{-5 + 6i}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряжённое к знаменателю$\overline{z_2} = -5 - 6i$. Согласно формуле(1.10) получим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 - 4i)(-5 - 6i)}{(-5 + 6i)(-5 - 6i)} = \frac{-39 + 2i}{61} = -\frac{39}{61} + \frac{2}{61}i.$$

5. Перевести комплексное число$z = -7\sqrt{3} + 7i$ в показательную форму и возвести в четвертую степень. Ответ записать в алгебраической форме.

Решение: Для того, перевести комплексное число в показательную форму, необходимо найти его модульρ и аргументφ. Для этого воспользуемся формулами (1.5) и (1.6). и определим действительную и мнимую части числа:

$$x = -7\sqrt{3} < 0, y = 7 > 0.$$

Получаем:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 14;$$
$$\varphi = \pi + arctg\frac{y}{x} = \frac{5\pi}{6}.$$

Тогда в показательной форме числоz имеет вид:

$$z = 14e^{\frac{5\pi}{6}i}.$$

Возведём данное число в четвёртую степень используя формулу (3.6):

$$z^4 = \left(14e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^4 = 38416e^{\frac{10\pi}{3}i}.$$

Учитывая, что функция$e^{i\varphi}$ имеет период$T = 2\pi i$, окончательно получаем:

$$z^4 = 38416e^{\frac{4\pi+6\pi}{3}i} = 38416e^{\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi\right)i} = 38416e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

Для того, чтобы перевестичислоz^4 в алгебраическую форму определимx иy по формулам (1.3):

$$x = \rho cos\varphi, x = 38416 \cdot cos\frac{4\pi}{3} = 38416 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -19208;$$

$$y = \rho sin\varphi, y = 38416 \cdot sin\frac{4\pi}{3} = 38416 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -19208\sqrt{3};$$

$$z = -19208 - i19208\sqrt{3}.$$

6. Найти модули комплексных чисел $z_1 = 7 - 3i, z_2 = 4e^{-3i}, z_3 = 0{,}85(cos4 - isin4$ и записать комплексно сопряжённые числа.

Решение: Числоz_1 задано в алгебраической форме, для нахождения модуля воспользуемся формулой (1.5):$x = 7, y = -3$, следовательно,

$$\rho = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{58}.$$

Числоz_2 задано в показательной форме$z = \rho e^{i\varphi}$(1.8), откуда следует, что$\rho = 4$.

Числоz_3 задано в тригонометрической форме$z = \rho(cos\varphi + isin\varphi)$ (1.8) следовательно$\rho = 0{,}85$.

Определим комплексно сопряжённые числа по формулам (1.9). Получаем:

$$\overline{z_1} = 7 + 3i, \overline{z_2} = 4e^{3i}, \overline{z_3} = 0{,}85(cos4 + isin4).$$

7. Для данного комплексного числа$\left(3 + i\sqrt{2}\right)^{-2}(-4 + 5i)^3$найти модуль.

Решение: Выражение$\left(3 + i\sqrt{2}\right)^{-2}(-4 + 5i)^3$ представляет из себя произведение двух комплексных чисел$z_1 = 3 + i\sqrt{2}$ и$z_2 = -4 + 5i$ возведенных в степень. Для каждого из них вычислим модуль:

$$\rho_1 = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{11}, \rho_2 = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41}.$$

Согласно формуле Муавра (3.6), при возведении комплексного числа в степень, его модуль также возводится в данную степень, т.е.

$$\rho_1{}^{-2} = \left(\sqrt{11}\right)^{-2} = \frac{1}{11}, \rho_2{}^3 = \left(\sqrt{41}\right)^3 = 41\sqrt{41}.$$

При перемножении двух комплексных чисел. их модули перемножаются (3.1), (3.2). Следовательно,

$$|z_1{}^{-2} \cdot z_2{}^3| = \rho_1{}^{-2} \cdot \rho_2{}^3 = \frac{1}{11} \cdot 41\sqrt{41} = \frac{41\sqrt{41}}{11}.$$

8. Вычислить$\sqrt[3]{z}$, если$z = -2 + 2i\sqrt{3}$,и изобразить найденные значения на комплексной плоскости.

Решение: Для вычисления$\sqrt[3]{z}$ переведём комплексное число в тригонометрическую форму, определив модуль и аргумент:

$$z = -2 + 2i\sqrt{3}, x = -2 < 0, y = 2\sqrt{3} > 0;$$

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4;$$

$$\varphi = \pi + arctg\left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

В тригонометрической форме получим:

$$z = -2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Для извлечения корня порядка$n = 3$ воспользуемся формулой (3.7):

где $k = 0; 1; 2$.

$$z_0 = \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 0}{3} + isin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 0}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{2\pi}{9} + isin\frac{2\pi}{9}\right) \approx \sqrt[3]{4}(0{,}77 + i \cdot 0{,}64)$$

$$\approx 1{,}22 + i \cdot 1{,}02;$$

$$z_1 = \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 1}{3} + isin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 1}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{8\pi}{9} + isin\frac{8\pi}{9}\right)$$

$$\approx \sqrt[3]{4}(-0{,}94 + i \cdot 0{,}34) \approx -1{,}49 + i \cdot 0{,}54;$$

$$z_2 = \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 2}{3} + isin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 2}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{14\pi}{9} + isin\frac{14\pi}{9}\right)$$

$$\approx \sqrt[3]{4}(0{,}17 + i \cdot 0{,}98) \approx 0{,}27 + i \cdot 1{,}56.$$

Построим графическое представление корней:

1. Вычерчиваем окружность радиуса$R = \sqrt[n]{\rho} \approx 1{,}6$.
2. Откладываем угол

$$\psi = \frac{\varphi}{n} = \frac{2\pi}{9}$$

и на его пересечении с окружностью отмечаем кореньz_0.

3. Вписываем в окружность правильный треугольник (рис. 4).

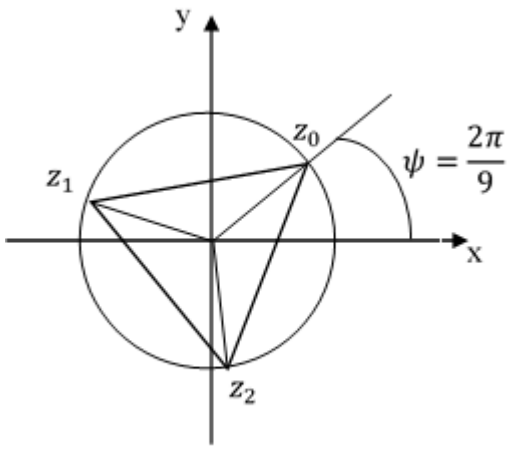


Рис. 4

9. Решить квадратное уравнение$z^2 - 5z + 9 = 0$.

Решение: Решим данное квадратное уравнение через дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac, D = (-5)^2 - 4 \cdot 9 = -9;$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{-9}}{2}.$$

Используя формулу (1.2), получим:$\sqrt{-9} = \sqrt{-1 \cdot 9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = 3i$.

Тогда

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm 3i}{2} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}i,$$

или

$$z_1 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i, z_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Что подтверждает теорему о том, что если многочлен имеет комплексный корень, то он имеет и комплексно сопряженный корень.

Элементы теории множеств

Понятие множества

Понятие множества относится к числу неопределяемых понятий, таких как, например, понятие точки в геометрии.

Объекты материального мира существуют в составе определенных совокупностей, которые и дают первые примеры множеств: стадо коров, отара овец, множество пальцев на руке и т.п. К примерам множеств, рассматриваемых в математике, относятся: множество всех целых чисел, множество решений данного уравнения, множество всех точек отрезка, множество всех треугольников и т.д.

В результате многократного использования в практической деятельности людей многочисленных примеров совокупностей сформировалось математическое понятие множества, как объединения отдельных объектов в нечто единое целое. Предметы, из которых состоит множество, называются его *элементами*. Множество считается заданным, если заданы его элементы, оно раз и навсегда определяется своими элементами.

Способы задания множества

Будем обозначать множества большими латинскими буквами:$A, B, C, \dots, X, Y, Z$.Элементы множеств принято обозначать малыми латинскими буквами$a, b, c, \dots, x, y, z$.Тот факт, что a является элементом множества A, символически записывают $a \in A$или $A \ni a$и читают: «a принадлежит A» или «А содержит a ». Если элемент a не принадлежит множеству A, то пишут:$a \notin A$.

Если множество состоит из конечного числа элементов, то оно называется *конечным*. В противном случае оно называется *бесконечным*. Конечное множество в принципе можно задавать перечислением всех его элементов. В этом случае в фигурных скобках записываются все элементы множества или их обозначения. Например, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\text{Шентала}, \text{Каменка}, \text{Кувак}\}$. Однако, если число элементов конечного множества очень велико, то задать его с помощью перечисления всех элементов практически невозможно.

Если множество бесконечно, то задать его перечислением всех элементов нельзя и в теоретическом плане. Такие множества иногда можно задавать в виде $\{a, b, c \dots\}$, если по указанным до многоточия элементам можно судить об оставшихся элементах. Например, $N = \{1,2,3, \dots\}$ есть множество всех натуральных чисел, $K = \{1, 4, 9, 25, 36, \dots\}$есть множество всех квадратов натуральных чисел.

Наиболее универсальным способом задания множества является задание его с помощью некоторого *характеристического свойства*, т.е. такого свойства, которое имеет место для каждого элемента данного множества и которое не выполняется для любого элемента, не принадлежащего данному множеству.

Пусть P- некоторое свойство. Обозначим через $P(x)$ утверждение: "Элемент xобладает свойством P". Тогда множество всех элементов, обладающих свойством P, будем обозначать так:$\{ x|P(x) \}$. Например,$X = \{x|\ x - \text{натуральное число, не делящееся на два}\}$есть множество всех нечетных натуральных чисел. Если множество A конструируется из элементов некоторого множества B с помощью характеристического свойства P, то можно писать$A = \{x|x \in B \text{ и } P(x)\}$ но чаще пишут$A = \{x \in B|\ P(x)\}$.

Последняя запись читается так: A есть множество всех элементов из B, обладающих свойством P. Например,$X = \{x \in \mathbb{N}|\ x^2 \leq 25\}$ есть множество$\{1,2,3,4,5\}$.Множество всех натуральных чисел от 10 до 100 можно записать:$\{x \in \mathbb{N}|\ 10 \leq x \leq 100\}$. Рассмотрим еще пример. Пусть$S(O, r)$ - окружность

с центром в точке O и радиуса r, лежащая в плоскости α. Вспоминая определение окружности, получаем$S(O,r) = \{M \in \alpha |\ OM = r\}$.

Равенство множеств

Множества A и B следует считать *равными* лишь в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов. Например, если$A = \{a, b, c, d\}$ и$B = \{b, d, c, a\}$, то $A = B$. В частности, порядок расположения элементов в записи множеств при их сравнении во внимание не принимается. Особо следует отметить, что каждый объект может быть элементом множества только один раз, например, $\{a, e, a, b, a\} = \{a, e, b\}$.

Пустое множество

Не существует ограничения в отношении того, насколько много или мало элементов может быть в одном множестве, множество может состоять из одного элемента, как, например, множество$X = \{x \in \mathbb{R} |\ x^2 + 2x + 1 = 0\}$, а может быть и бесконечным, как, например,$\mathbb{N} = \{x |\ x - \text{натуральное число}\}$.В математике оказывается удобным рассматривать так называемое *пустое множество*, т.е. такое множество, которое не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом$\emptyset$. Очевидно, что$\emptyset = \{x |\ x \neq x\}$. Легко уяснить, что существует лишь одно пустое множество, хотя задано оно может быть различным образом. Так$\{x \in \mathbb{N} |\ x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$.

Числовые множества

Математика изучает главным образом такие множества, элементами которых являются математические объекты: точки, линии, формулы, уравнения, функции и т.п. Множества, элементами которых является числа, называются *числовыми*. Рассмотрим обозначения наиболее употребительных множеств:

$\mathbb{N}$ - множество всех натуральных чисел,

$\mathbb{N}_0$- множество всех целых неотрицательных чисел,

$\mathbb{Q}$- множество всех рациональных чисел,

$\mathbb{Q}^+$- множество всех рациональных положительных чисел,

$\mathbb{Z}$ - множество всех целых чисел,

$\mathbb{R}$ - множество всех вещественных чисел,

$\mathbb{R}^+$- множество всех положительных вещественных чисел,

$\mathbb{C}$ - множество всех комплексных чисел.

Приведем еще множества, являющиеся *числовыми промежутками*.

Пусть$a < b$.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}$– отрезок,

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}$ – интервал,

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\}$ – полуинтервал, замкнутый слева,

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a < z \leq b\}$ – полуинтервал, замкнутый слева,

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} |\ x \leq a\}$ или $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ x \geq a\}$ – замкнутый луч,

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} |\ x < a\}$ или $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ x > a\}$ – открытый луч.

Подмножество

Множество A называется *подмножеством* множества B, еслика́ждый элемент множества Aявляется элементоми множества B. Если A - подмножество B, то пишут$A \subset B$ или $B \supset A$ и читают: "A подмножествоB" или "A включено в B", или "X включает A", или"XсодержитA". Пустое множество является подмножеством любого множества, так как оно вообще не содержит элементов, а потому и таких элементов, которые не принадлежали бы B. Имеем:$\emptyset \subset B$.

Если A не является подмножеством B, то пишут:$A \not\subset B$ или $B \not\supset A$.

Из определения легко вытекают следующие свойства отношения включения:

1.$X \subset X$, т.е всякое множество является подмножеством самого себя;

2. $A = X$ тогда и только тогда, когда $A \subset X$ и $X \subset A$.

3. Если $A \subset X$ и $X \subset Y$, то $A \subset Y$.

Говорят, что A является собственным подмножеством множества X, если $A \subset X$ и $A \neq X$. Например, числовые промежутки являются собственными подмножествами множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Множество простых чисел является собственным подмножеством множества натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Пусть $x \in X$. Множество $\{x\}$ является подмножеством X, т.е. $\{x\} \subset X$. Заметим, что следует различать элемент x и одноэлементное множество $\{x\}$. Так, если $X = \{x, y, \{x, y\}\}$, то $\{\{x, y\}\}$ – подмножество X, содержащее один элемент $\{x, y\}$, а $\{x, y\}$ – подмножество X, содержащее два элемента x и y. Ясно, что $\{\{x, y\}\} \neq \{x, y\}$.

Булеан

Элементы множества сами могут быть некоторыми множествами. Например, элементами множества студенческих групп являются студенческие группы, которые, в свою очередь, являются множествами студентов. Большое применение в математике находит множество, элементами которого являются подмножествами какого-либо множества. Пусть X - некоторое множество. Множество всех подмножеств множества X называется *булеаном* X (в честь ирландского математика и логика Дж.Буля (1815-1864)). Булеан обозначается символом $B(X)$. Итак, $B(X) = \{A \mid A \subset X\}$. Заметим, что подмножество $A \subset X$ является элементом $B(X)$. В частности, $\emptyset \in B(X)$.

Можно доказать, что если множество X состоит из n элементов, то оно содержит 2^n подмножеств. Обозначив через $m(X)$ число элементов конечного множества X, можно записать $m(B(X)) = 2^{m(X)}$.

Универсальное множество

Предположим, что изучается некоторая область знаний. Множество, состоящее из всех элементов исследуемой области, называется *универсальным*. Например, универсальным числовым множеством, рассматриваемым в математике начальной школы, является множество рациональных чисел. Универсальным числовым множеством нашего математического курса является множество вещественных чисел. Заметим, что универсальное множество зависит от того вопроса, который рассматривается, например, при выборе актива группы универсальным множеством является множество студентов группы. Мы будем обозначать универсальное множество символом U. На диаграммах универсальное множество обычно изображается множеством точек некоторого прямоугольника плоскости, а принадлежащие ему подмножества - кругами или овалами внутри прямоугольника.

Операции над множествами

Операции над множествами позволяют из имеющихся множеств конструировать новые множества. Рассмотренное выше построение булеана $B(X)$ по множеству X является примером такого конструирования. Рассмотрим теперь операции над множествами, в известной степени аналогичные алгебраическим операциям над числами.

Объединение множеств.

Объединением данных множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из данных множеств.

Если взяты два множества, например X и Y, то их объединение обозначается символом $X \cup Y$. Здесь $\cup$ - символ объединения. Итак, $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}$.

Здесь союз "или" употреблен в неразделительном смысле, т.е. элементы, содержащиеся одновременно в X и Y, входят в их объединение. Согласно общему принципу образования множества, эти элементы входят в $X \cup Y$ только один раз.

Например, если$X = \{1,2,3,4\}$,$Y = \{2,4,6\}$, то$X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6\}$.На рис. 1 показана диаграмма, иллюстрирующая объединение двух множеств.

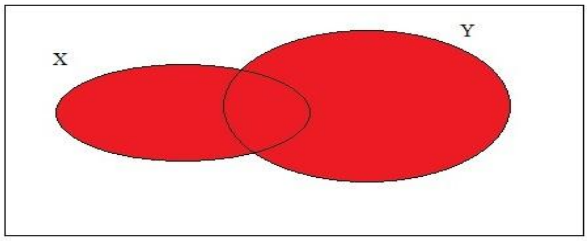


Рис. 1

Приведем некоторые свойства операции$\cup$ НижеX, Y, Z - произвольные множества.

1. Идемпотентность объединения:$X \cup X = X$.
2. Коммутативность объединения:$X \cup Y = Y \cup X$.
3. Ассоциативность объединения:$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$.
4. $X \cup \emptyset = X$.

В силу свойства ассоциативности порядок объединения множеств X, Y и Zнесущественен, поэтому объединение этих множеств записывается в виде: $X \cup Y \cup Z$. Порядок расположения множеств в объединении тоже несущественен (в силу свойства коммутативности). Поэтому $X \cup Y \cup Z = Z \cup X \cup Y = Y \cup Z \cup X$и т. д.

Объединение множеств используется при решении многих математических задач.

Пример. Рассмотрим совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0. \end{array}\right.$

Пусть M - множество всех решений этой совокупности, M_1 - множество решений уравнения $f_1(x) = 0$, а M_2 - множество решений уравнения $f_2(x) = 0$.Тогда $M = M_1 \cup M_2$. Заметим, что к совокупности уравнений может сводится одно уравнение.

Пересечение множеств

Пересечением данных множеств называется множество всех элементов, принадлежащих каждому из данных множеств. В случае, если даны два множества X и Y, то их пересечение обозначается$X \cap Y$, где $\cap$ - символ, обозначающий операцию пересечения. Итак, $X \cap Y = \{x | x \in X \text{ и } x \in Y\}$. Пересечение двух множеств на диаграмме изображается общей частью кругов, изображающих пересекаемые множества (рис. 2).

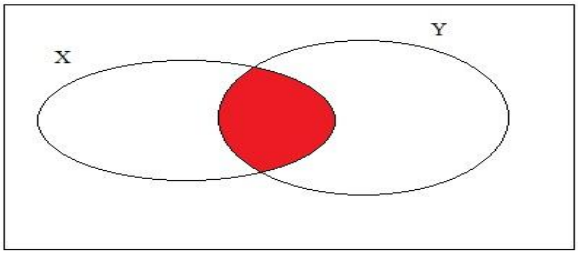


Рис. 2

Если $X \cap Y = \emptyset$, то говорят, что множества X и Y не пересекаются или дизъюнктные.

Пример 1. Пусть X - множество всех ромбов, Y - множество всех прямоугольников. Тогда $X \cap Y$ - множество всех квадратов

Пример 2. Обозначим через P - множество всех простых чисел, пусть $A = \{7x | x \in \mathbb{N}\}$. Тогда $P \cap A = \{7\}$.

Приведем основные свойства операции пересечений. Пусть X, Y, - произвольные множества.

1.Пересечение включено в каждоеиз пересекаемых множеств:

$$X \cap Y \subset X, \qquad X \bigcap Y \subset Y.$$

2. $Z \subset X \bigcap Y$, тогда и только тогда, когда $Z \subset$ X и $Z \subset Y$.

3. Идемпотентность: $X \cap X = X$.

4. Коммутативность: $X \cap Y = Y \cap X$.

5. Ассоциативность: $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$.

Операция пересечения связана с объединением законами дистрибутивности:

6. $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.

7. $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

Пересечение множеств используется при решении многих математических задач.

Пример 3.Рассмотрим систему уравнений: $\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0. \end{cases}$

Пусть M – множество решений этой системы, M_1 – множество решений уравнения $f_1 = 0, M_2$ – множество решений уравнения$f_2(x) = 0$.Тогда $M = M_1 \cap M_2$.

Разность и дополнение

Пример. Тренер по плаванию был предупрежден, что студенты 15 группы не смогут прийти на тренировку, так как на это время им назначена контрольная работа по математике. Его интересует, кто же из студентов, занимающихся плаванием, может быть на тренировке. Взяв список группы по плаванию, тренер вычеркивает из него студентов 15 группы. В результатеон получает нужный ему список. Операция, проделанная тренером, в теории множеств называется вычитанием. Вычитание обозначается символом \. Пусть X - множество студентов, занимающихся плаванием, Y - множество студентов 15 группы. Тогда $X \backslash Y$ – множество студентов, которые могут прийти на тренировку.

Разностью множеств X и Y называется множество всех элементов из X, не принадлежащих Y. Разность обозначается $X \backslash Y$ (читается: "X минус Y"). Согласно определения $X \backslash Y = \{x \in X | \, x \notin Y\}$.

На рис.3 показано изображение разности с помощью кругов Эйлера, причем множество $X \backslash Y$ заштриховано.

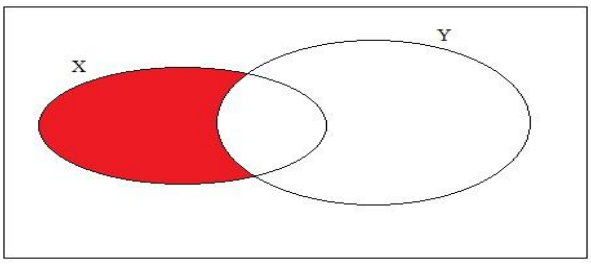


Рис. 3

Приведем некоторые свойства операции вычитания.

1. $A \backslash \emptyset = A, \ \emptyset \backslash A = \emptyset$.

2. $A \backslash A = \emptyset$.

3. $X \backslash Y \subset X$.

4. $(X \backslash Y) \cup Y = X \cup Y$.

5. $(X \backslash Y) \backslash Z = (X \backslash Z) \backslash Y$.

Проиллюстрируем на кругах Эйлера свойство 5.

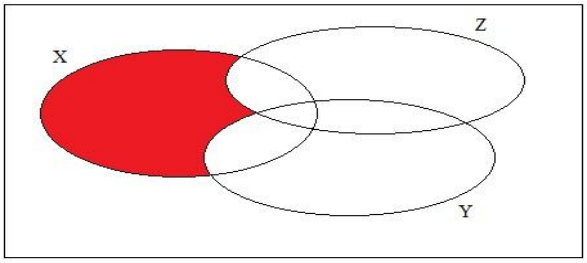


Рис. 4

Если $Y \subset X$, го разность $X \backslash Y$ называют дополнением множества Y до множества X. Дополнение принято обозначать $C_X Y$. Графическое изображение дополнения приведено на рис. 5.

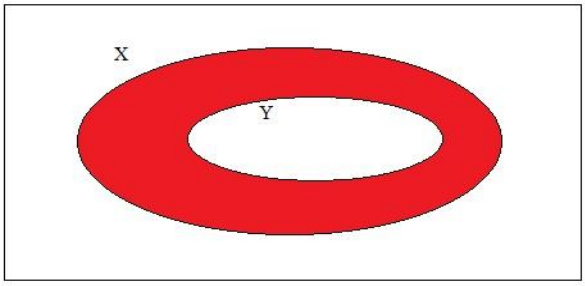


Рис. 5

Если из контекста ясно, до какого множества проводится дополнение, то используется обозначение CY или $\overline{Y}$. Эти обозначения будут использоваться в дальнейшем. Если при этом в тексте не будет содержаться прямых указаний на множество, до которого производится дополнение, то это будет означать, что оно производится до универсального множества.

Рассмотрим важнейшие свойства дополнения.

1. Инволютивность дополнения: $\overline{\overline{X}} = X$.
2. Если $X \subset Y$, то$\overline{Y} \subset \overline{X}$.
3. Если $X \cap Y = \emptyset$, то$X \subset \overline{Y}$ и $Y \subset \overline{X}$.
4. Законы де Моргана:$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}, \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

Декартово (прямое) произведение множеств

Пусть X и Y - некоторые множества и $x \in X, y \in Y$. Располагая элементы x и y в определенном порядке, например, считая x первым элементом, а y вторым, мы получим упорядоченную пару (x, y). Элемент x называют первой координатой упорядоченной пары (x, y), а элемент y - второй координатой. Две упорядоченные пары считаются равными тогда и только тогда, когда равны их первые и вторые координаты, т.е. $(x, y) = (u, v)$ тогда и только тогда, когда $x = u$ и $y = v$.

Некоторые объекты в математике, имеющие важное теоретическое и прикладное значение, являются упорядоченными парами.

Декартовым или *прямым* произведением множества X на множество Y называется множество всех упорядочение пар (x, y), где $x \in X, y \in Y$. Обозначается прямое произведение символом $X \times Y$. Таким образом

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in \text{X и } y \in Y\}.$$

По определению полагают, что$X \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times Y = \emptyset$.Декартово произведение множества X на себя называют *декартовым (или прямым) квадратом*. При этом полагают $X \times X = X^2$.Имеем: $X^2 = \{(x, y) | x \in \text{X}, y \in X\}$.

Приведем теперь некоторые свойства, связывающие рассмотренные выше операции над множествами с операцией декартова произведения.

Дистрибутивность прямого произведения относительно объединения:

1). $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$;

2) $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$.

Дистрибутивность прямого произведения относительно пересечения:

3). $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$;

4) $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$.

Дистрибутивность прямого произведения относительно вычитания:

1) $(X \setminus Y) \times Z = (X \times Z) \setminus (Y \times Z)$;

2) $X \times (Y \setminus Z) = (X \times Y) \setminus (X \times Z)$.

Примеры.

1. Запишите в символической форме следующие множества:

а) множество всех положительных рациональных корней уравнения$x^7 - 8x^3 - 3 = 0$;

б) множество всех целых корней уравнения $f(x) = 0$;

в) множество всех равносторонних треугольников;

г) множество всех прямых, параллельных данной прямой;

д) множество всех хорд окружности;

е) множество всех квадратных уравнений с вещественными коэффициентами, имеющими единицу своим корнем;

ж) множество всех окружностей радиуса 5, центры которых принадлежат прямой *l*;

Решение.

а) $A = \{x | x \in \mathbb{Q}^+, x^7 - 8x^3 - 3 = 0\}$;

б) $A = \{x |\ x \in \mathbb{Z}, f(x) = 0\}$;

в) $A = \{\Delta(a, b, c) |\ a = b = c\}$;

г) $\mathrm{A} = \{a |\ a || \mathrm{c}\}$;

д) $A = \{a | a \leq r\}$;

е) $A = \{ax^2 + bx + c = 0 | x = 1\}$;

ж) $A = \{(x - a)^2 + (y - b)^2 = 25 |\ (a; b) \in l\}$.

2. Найдите числовое множество A такое, что $\{x \in A \mid x > 0\} = \{x \in A \mid x < 0\}$.

Решение.

$$A = \{|x| | x \neq 0\}$$

3. В каких отношениях находятся между собой множества $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 3\}$.

Решение. Так как решением уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$являются корни $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, то множество B имеет вид $B = \{1,2\}$. Отсюда получаем , что $B \subset A \subset C$.

4. Пусть X_1 и X_2 – множество студентов двух групп, а M – множество юношей, обучающихся в этих группах. Запишите с помощью включения следующие условия:

а) все юноши обучаются в первой группе;

б) в первой группе нет юношей;

в) вторая группа состоит из юношей;

г) все юноши обучаются в одной группе;

д) на курсе обучаются только юноши;

д) на курсе обучаются только девушки.

Решение.

а) $M \subset X_1$;

б) $M \not\subset X_1$;

в) $M = X_2$;

г) $M \subset X_1$ или $M \subset X_2$;

д) $U = M$;

д) $M = \emptyset$.

5. Докажите, что если $A \subset \emptyset$, то $A = \emptyset$. Существуют ли другие множества, кроме пустого, обладающие этим свойством?

Доказательство. Запись $A \subset B$ означает, что в множестве A столько же или меньше элементов, чем в множестве B. Так как в пустом множестве $\emptyset$ нет элементов, то и в A тоже нет ни одного элемента. Поэтому A будет являться пустым множеством ($A = \emptyset$).

6. Укажитебулеан множества $X = \{0, 1, 2\}$, выписав все его элементы.

Решение.$B(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$. Мы видим, что число элементов булеана в случае, когда множество X имеет 3 элемента, равно 8, т.е. 2^3. Выпишем все элементы, содержащие 0 и не содержащие 0: $\{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}$ и $\{1,2\}, \{2\}, \{1\}, \emptyset$.

Случайно ли, что их число одинаково? Каждому множеству A, содержащему0, сопоставляется одно и только одно множество, не содержащее нуля, состоящее из всех таких элементов, входящих в X, которые не входят в A. Поэтому подмножеств, содержащих 0 и не содержащих 0 - одинаковое количество.

7. Решить уравнение: $f(x) = (x^3 + 8)(x^2 - 5x + 6)$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} x^3 + 8 = 0, \\ x^2 - 5x + 6 = 0. \end{array}\right.$

Находим: $M_1 = \{x|x3 + 8 = 0\} = \{-2\}, M_2 = \{x|x2 - 5x + 6 = 0\} = \{2; 3\}$. Отсюда $M = M_1 \cup M_2 = \{x|f(x) = 0\} = \{-2; 2; 3\}$.

8. Решить систему: $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x^2 - 4x + 3 = 0. \end{cases}$

Решение. Имеем: M – множество решений системы, $M_1 = \{x|\ x^2 - 5x + 6 =$ *0={2,3},M2=x| x2−4x+3=0=1,3.*ТогдаM= $M_1 \cap M_2$={3}.

9. Найдите дополнение множества A до множества X,если:

а)$X = \{3,8,7,4,2,1\}, A = \{2,7\}$;

б)$X = \{10^n \mid n \in \mathbb{N}\}, A = \{100^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

в)$X = \{3x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}, A = \{3x + 4 \mid x \in \mathbb{N}\}$;

г)$X = \{x^2 + x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}, A = \{x^2 + 5x + 7 \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

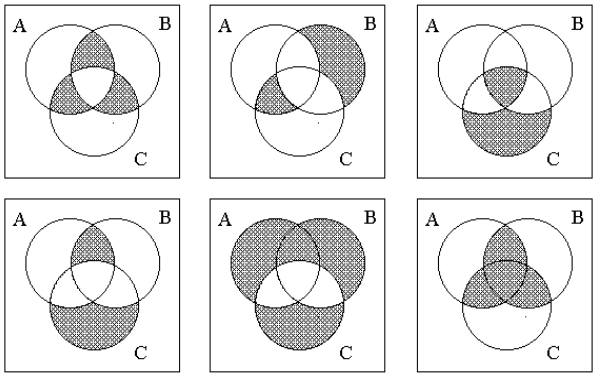
а) $B = \{3,8,4,1\}$;

б) $B = \{10^n | n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$;

в) $B = \{1\}$;

г) $B = \{1,3\}$.

10. Запишите с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям.



Решение.

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \backslash (A \cap B \cap C);$$
$$(B \cup (A \cap C)) \backslash ((B \cap C) \cup (A \cap B));$$
$$(C \backslash (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C);$$
$$C \cup ((A \cap B) \backslash (A \cap C));$$
$$(A \cup B \cup C) \backslash ((A \cap C) \cup (B \cap C));$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

11. Пусть универсальное множество U состоит из 100элементов, его подмножестваA и B соответственно из 64 и 42 элементов. Определите минимально возможное число элементов следующих множеств:

а) $A \cup B$, б) $A \cap B$, в) $A \backslash B$,г) $\overline{A} \backslash B$, д) $\overline{A} \backslash (A \cup B)$.

Решение.

а) Минимально возможное число элементов $A \cup B$ будет тогда, когда $B \subset A$, т.е. 64 элемента.

б) Минимально возможное число элементов $A \cap B$ будет тогда, когда $A \cup B = U$, т.е. $(64 + 42) - 100 = 6$.

в) Минимально возможное число элементов $A \backslash B$ будет тогда, когда $B \subset A$ и равно $64 - 42 = 22$.

г) Минимально возможное число элементов $\overline{A} \backslash B$ будет тогда, когда $B \subset A$ т.е. равно 0.

д) Минимально возможное число элементов $\overline{A} \backslash (A \cup B)$будет тогда, когда $B \subset A$, т.е. $A \backslash (A \cup B) = A \backslash A$ и равно 0.

12. Пусть $X = \{a, b, c\}, Y = \{1,2\}$. Зададим множество $X \times Y$ перечислением его элементов.

Решение. Имеем $X \times Y = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$. Перемножим множества X и Y в обратном порядке:$Y \times X = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$. Замечаем, что $X \times Y \neq Y \times X$. Следовательно, декартово произведение не обладает свойством коммутативности (переместительности).

13. Найти $A \times B$, если

а) $A = \{0,1,2\}, B = \{1,2\}$;

б) $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$;

в) $A = \{0, \Delta, \}, B = \{a, b, \Delta\}$.

Решение.

а) $A \times B = \{(0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$;

б)$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$;

в)$A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, \Delta), (\Delta, a), (\Delta, b), (\Delta, \Delta), (, a), (, b), (, \Delta)\}$.

Задачи для самостоятельного решения

1.Какие из следующих пар множеств связаны между собой отношением включения? Изобразите их на числовой прямой.

а)$A = \{x | x \in \mathbb{N}, x > 3\}, B = \{y | \ y \in \mathbb{N}, y > 2\}$;

б) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq 2\}, B = \{y | y \in \mathbb{R}, y \leq 4\}$;

в) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 < \ x \ \leq 4\}, B = \{y | y \in \mathbb{R}, 1 \leq y < 2\}$;

г) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 < \ x \ \leq 5\}, B = \{y | y \in \mathbb{R}, 1 < \ y \ \leq 5\}$.

2.Вернылизаписи.

а) $\{1;\ 4\} \not\subset \{\{1;\ 4;\ 3\}, \{1;\ 2\}, 4;\ 1\}$;

б) $\{1;\ 4\} \in \{\{1;\ 4;\ 3\}, \{1;\ 2\}, 1\}$;

в) $\{1;\ 3\} \in \{\{1;\ 2;\ 3\}, \{1;\ 3\}, 1\}$;

г)$\{1;\ 5\} \subset \{\{1;\ 2;\ 5\}, \{1;\ 5\}, 1;\ 2\}$.

3 Выпишите пары равных множеств.

а) $A = \{ф;\ в;\ с\}, B = \{в;\ ф;\ с\}$;

б) $A = \{1;\ 2;\ 3\}, B = \{\text{I};\ \text{II};\ \text{III}\}$;

в) $A = \mathbb{N},\ B\ -$ множество натуральных чисел первого миллиона;

г) $A = [2; 3], B = \ \{2; 3\}$;

д) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 2 < x < 10\}, B = \{y |\ y \in \mathbb{Z}, 2 < y < 10\}$;

е) $A = \{x | x \in Z, -3 < x < 5\}, B = \{y |\ y \in R, -3 <\ y < 5\}$;

ж) A - множество всех квадратов, B - множество всех прямоугольников с равными смежными сторонами;

з) $A = (-2; 3], B = (-2; 3)$.

4. Перечислите элементы булеана множества $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$. Проверьте, что A и $B(A)$ имеют общий элемент.

5.Докажите, чтоесли$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_1$, то $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$.

6.Пусть$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\ \}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\ \}\}\}\}$:

а) подсчитайте число элементов множества A;

б) покажите, что каждый элемент из A является его подмножеством.

7. Для написания почтового индекса используется шесть ячеек. Сколько элементов содержит множество возможных почтовых отделений?

8.Пусть A - множество всех натуральных делителей числа 18; B - множество всех натуральных делителей числа 24. Найти множество общих делителей чисел 18 и 24. Найти самый большой общий делитель.

9. Найдите для каждой тройки множеств A, B, Cрезультаты операции $A \cap (B \cup C)$; $A \cup (B \cap C)$; $(A \cup B) \cap C$; $(A \cap \mathrm{C}) \cup (A \cap B)$; $(A \cup C) \cap B$; $(A \cap B) \cup C$, если:

а) $A = \{2;\ 3;\ 4\}, B = \{3;\ 6\}, C = \mathbb{N}$;

б) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}, C = \{-1;\ 0;\ 1\}$;

в) $A = \{1;\ 3;\ 5;\ \ldots\}, B = \{2;\ 4;\ 6;\ \ldots\}, C = \mathbb{N}$;

г) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}, C = \{3;\ 6;\ 9;\ \ldots\}$;

д) $A = \{1;\ 2;\ 3\}, B = \{2;\ 4\}, C = [2; 8]$;

е) $A = [2;\ 3], B = (0;\ 4], C = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$;

ж) $A = (2;\ 5), B = (0;\ 6], C = [-1;\ 3)$.

10. Пусть A, B, C – подмножества множества X. Доказать, что

а)$X \backslash (X \backslash A) = A$;

б)$X \backslash B \subset X \backslash A$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$;

в) $A \backslash B = A \cap (X \backslash B)$; г)$A \cap B = X \backslash ((X \backslash A) \cup (X \backslash B))$.

11. Найти разности $A \backslash B$ и $B \backslash A$ множеств A и B, если:

а) $A = \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 10\}, B = \{5;\ 6;\ \ldots;\ 12\}$;

б) A - множество натуральных делителей числа 18; B - множество натуральных делителей 24;

в) A - множество правильных многоугольников, B - множество прямоугольников;

г) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\}, B = \{\ x |\ x \in \mathbb{R}, 3 \leq x \leq 7\}$;

д) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, 1 < x \leq 4\}, B = \{\ x |\ x \in \mathbb{R}, 2 < x \leq 8\}$;

е) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 < x < 2\}, B = \{\ x |\ x \in \mathbb{R}, 1 < x \leq 3\}$;

ж) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 < x < 3\}, B = \{\ x |\ x \in \mathbb{R}, 0 < x < 5\}$;

з) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -\infty < x \leq 2\}, B = \{\ x |\ x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 5\}$;

и) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -\infty < x < 5\}, B = \{\ x |\ x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 6\}$;

к) $A = [3; 5], B = [4; 8]$;

л) $A = (3; 6), B = (4; 8]$;

м) $A = (3; 8), B = (2; 9]$;

н) $A = (-2; 1), B = [0; 3)$;

о) $A = \mathbb{N}, B = [0; 4]$;

п) $A = (0; 2), B = \mathbb{N}$;

р) $A = \mathbb{N}_0, B = [0; 5)$.

12. Проверить, что $A \times B \neq B \times A$ для множеств $A = [0; 1], B = [0; 2]$.

13. Проверить, что $A \times B = B \times A$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

14. Пусть даны множества A, B, C и$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ - дополнения соответствующих множеств A, B, C до универсального множества U. Изобразите при помощи кругов Эйлера следующие множества: $(A \cap B \cap C \neq \emptyset)$:

а)$(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C$;

б) $(A \cup \overline{B}) \cap \overline{C}$;

в) $(A \backslash B) \cap C$;

г)$(\overline{A \cup B}) \cap C)$;

д)$\overline{A} \backslash (B \cap C)$;

е)$\left(\overline{A \backslash C}\right) \cup B$;

ж)$\left(B \backslash \overline{C}\right) \cup A$;

з) $\overline{A \cap B \cap C}$;

и) $(A \cup B) \backslash \overline{C}$;

к) $\left(\overline{B \backslash A}\right) \cap \overline{C}$;

л) $\left(B \cup \overline{C}\right) \backslash A$;

м) $\overline{A \cup B \cap C}$.

15. Доказать, что

а)$A \subset B$ тогда и только тогда, когда$A \cup B = B$;

б)$A \subset B$ тогда и только тогда, когда$A \cap B = A$;

в)$A \subset B$ тогда и только тогда, когда$A \backslash B = \emptyset$;

16. Пусть A и B – данные множества. Решить уравнение:

а)$A \backslash X = B$;

б)$A \cup X = B$;

в)$A \cap X = B$.

17. Пусть$A \subset B \subset C$. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} B \backslash X = A, \\ B \cup X = C. \end{cases}$$

18. Пусть$B \subset A \subset D$. Показать, что множество$X = B \cup (D \backslash A)$ является решением системы$\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = D. \end{cases}$

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 2

Задание № 1

1. Изобразить комплексные числа на комплексной плоскости.
1) $z_1 = 2 - 3i, z_2 = -4 + 2i, z_3 = 1 + 5i$;
2) $z_1 = -2 + 3i, z_2 = 4 - 2i, z_3 = -1 + 5i$;
3) $z_1 = -7 + 2i, z_2 = 3 - 4i, z_3 = 6 + 2i$;
4) $z_1 = 7 - 2i, z_2 = -3 + 4i, z_3 = -6 + 2i$;
5) $z_1 = 3 - 5i, z_2 = -6 + i, z_3 = -2 - 4i$;
6) $z_1 = -3 + 5i, z_2 = -6 - i, z_3 = 2 - 4i$;
7) $z_1 = 5 + 2i, z_2 = 1 - 3i, z_3 = -4 + 5i$;
8) $z_1 = 5 - 2i, z_2 = -1 - 3i, z_3 = -1 + 6i$;
9) $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 - 5i, z_3 = -4 - i$;
10) $z_1 = -1 + 2i, z_2 = 3 + 5i, z_3 = 4 - i$.
11) $z_1 = -2 - 3i, z_2 = 4 + 2i, z_3 = -1 - 5i$;
12) $z_1 = 2 + 3i, z_2 = -4 - 2i, z_3 = -1 - 5i$;
13) $z_1 = 7 + 2i, z_2 = 3 + 4i, z_3 = 6 - 2i$;
14) $z_1 = -7 - 2i, z_2 = -3 - 4i, z_3 = 6 - 2i$;
15) $z_1 = 3 + 5i, z_2 = 6 + i, z_3 = -2 + 4i$;
16) $z_1 = -3 - 5i, z_2 = 6 - i, z_3 = 2 + 4i$;
17) $z_1 = 5 - 2i, z_2 = 1 + 3i, z_3 = -4 - 5i$;
18) $z_1 = -5 - 2i, z_2 = 1 - 3i, z_3 = 1 + 6i$;
19) $z_1 = -1 + 2i, z_2 = 3 + 5i, z_3 = -4 + i$;
20) $z_1 = 1 - 2i, z_2 = -3 + 5i, z_3 = 4 + i$.
2. Возвести комплексное числоz в квадрат.
1) $z = -4 + 2i$; 2) $z = -2 - 4i$; 3) $z = 3 - 5i$;
4) $z = -1 + 5i$; 5) $z = -3 + 5i$; 6) $z = -1 + 2i$;
7) $z = 3 - 4i$; 8) $z = -4 + 5i$; 9) $z = 7 - 2i$;
10) $z = -1 + 6i$; 11) $z = 3 + 2i$;12) $z = -1 - 4i$;13) $z = 6 - 5i$;
14) $z = 3 + 5i$;15) $z = -2 + 5i$;16) $z = -2 + 2i$;
17) $z = 2 + 4i$;18) $z = -4 + 3i$;19) $z = 7 - i$;
20) $z = -5 + 6i$;
3. Найти аргумент комплексного числа.
1) $z_1 = 4 - 4i, z_2 = -\sqrt{3} + i$;
2) $z_1 = -4 + 4i, z_2 = -\sqrt{3} - i$;
3) $z_1 = -2 + 2i\sqrt{3}, z_2 = 3 - i\sqrt{3}$;
4) $z_1 = 2 - 2i\sqrt{3}, z_2 = -3 + i\sqrt{3}$;
5) $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i, z_2 = \sqrt{3} - 3i$;
6) $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, z_2 = -\sqrt{3} - 3i$;
7) $z_1 = -2 - 2i, z_2 = -5\sqrt{3} + 5i$;
8) $z_1 = -2 + 2i, z_2 = 5\sqrt{3} - 5i$;
9) $z_1 = -2 - 2i\sqrt{3}, z_2 = 3 - i\sqrt{3}$;
10) $z_1 = -1 - i, z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.
11) $z_1 = 2 - 3i, z_2 = -4 + 2i$;
12) $z_1 = -2 + 3i, z_2 = 4 - 2$;
13) $z_1 = -7 + 2i, z_2 = 3 - 4i$;
14) $z_1 = 7 - 2i, z_2 = -3 + 4i$;
15) $z_1 = 3 - 5i, z_2 = -6 + i$;
16) $z_1 = -3 + 5i, z_2 = -6 - i$;

17) $z_1 = 5 + 2i, z_2 = 1 - 3i$;
18) $z_1 = 5 - 2i, z_2 = -1 - 3i$;
19) $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 - 5i$;
20) $z_1 = -1 + 2i, z_2 = 3 + 5i$.

4. Выполнить действия:$z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 z_2,\ z_1 : z_2$.
1) $z_1 = 2 - 4i, z_2 = -5 + 3i$;
2) $z_1 = 3 - 5i, z_2 = 6 + 4i$;
3) $z_1 = 4 - i, z_2 = 3 + 2i$;
4) $z_1 = 5 - 6i, z_2 = -7 + 3i$;
5) $z_1 = -1 + 2i, z_2 = 3 - i\sqrt{3}$;
6) $z_1 = 1 - 2i, z_2 = -7 + 6i$;
7) $z_1 = -2 + 3i, z_2 = 4 + 7i$;
8) $z_1 = 3 + 7i, z_2 = 1 - 4i$;
9) $z_1 = -3 + 4i, z_2 = 2 - 5i$;
10) $z_1 = 2 + i, z_2 = -3 - 4i$.
11) $z_1 = -2 + 4i, z_2 = 5 - 3i$;
12) $z_1 = -3 + 5i, z_2 = -6 - 4i$;
13) $z_1 = -4 + i, z_2 = -3 - 2i$;
14) $z_1 = -5 + 6i, z_2 = 7 - 3i$;
15) $z_1 = 1 - 2i, z_2 = -3 + i\sqrt{3}$;
16) $z_1 = -1 + 2i, z_2 = 7 - 6i$;
17) $z_1 = 2 - 3i, z_2 = -4 - 7i$;
18) $z_1 = -3 - 7i, z_2 = -1 + 4i$;
19) $z_1 = 3 - 4i, z_2 = -2 + 5i$;
20) $z_1 = -2 - i, z_2 = 3 + 4i$.

5. Перевести комплексное число в показательную форму и возвести в степень. Ответ записать в алгебраической форме.

1)$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)^3$, 2) $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-3}$, 3) $\left(-\sqrt{3} + i\right)^4$;
4) $(-2 + 2i)^{-3}$, 5) $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^5$, 6) $(-2 - 2i)^{-5}$;
7) $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^3$, 8) $\left(\sqrt{3} - i\right)^4$, 9) $\left(-\sqrt{3} - i\right)^3$;
10) $\left(3 - i\sqrt{3}\right)^{-4}$, 11)$\left(1 - \frac{1}{2}i\right)^3$, 12) $\left(\frac{1}{2} - i\sqrt{3}\right)^{-3}$,
13) $\left(-\sqrt{3} + 2i\right)^4$; 14) $(2 + 2i)^{-3}$, 15) $\left(-\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\right)^5$,
16) $(-2 - i)^{-5}$; 17) $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3$, 18) $\left(\sqrt{3} - 2i\right)^4$,
19) $\left(-\sqrt{3} + i\right)^3$; 20) $\left(3 + i\sqrt{3}\right)^{-4}$.

6. Найти модуль комплексного числа.
1) $(-2 + i)^4(2 - 2i)^{-3}$,
2) $\left(2 - i\sqrt{3}\right)^3(1 + 6i)^{-2}$;
3) $\left(\sqrt{3} + i\right)^5(6 - 6i)^{-2}$,
4) $(-i)^3\left(2 + i\sqrt{3}\right)^{-2}$;
5) $(1 - i)^{-3}\left(\sqrt{3} - i\right)^4$,
6) $\left(3 - i\sqrt{2}\right)^3(7 - i)^{-4}$;
7) $i^5(7 - i)^3$,
8) $(1 + i)^7(3 - 2i)^{-3}$;

9) $\left(\sqrt{7}+i\right)^{-3}(2-3i)^5$,

10) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{-4}\left(\sqrt{5}+2i\right)^2$;

11) $(-2-i)^3(2+2i)^{-4}$,

12) $\left(2+i\sqrt{3}\right)^2(-1+6i)^{-3}$;

13) $\left(\sqrt{3}-i\right)^3(-6-6i)^{-5}$,

14) $(1-i)^2\left(2-i\sqrt{3}\right)^{-2}$;

15) $(1+i)^{-5}\left(-\sqrt{3}-i\right)^3$,

16) $\left(3+i\sqrt{2}\right)^{-3}(-7+i)^4$;

17) $i^{-5}(7+i)^3$,

18) $(1-i)^7(-3-2i)^3$;

19) $\left(\sqrt{7}-i\right)^3(-2-3i)^{-5}$,

20) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{-2}\left(\sqrt{5}-2i\right)^3$.

7. Для данного комплексного числа найти модуль и записать комплексно-сопряжённое число.

1) $z_1=2-i\sqrt{3}, z_2=3e^{5i}, z_3=cos5\varphi+isin5\varphi$;

2) $z_1=4+i\sqrt{2}, z_2=2e^{-3i}, z_3=0{,}2(cos1+isin1)$;

3) $z_1=-2+i\sqrt{3}, z_2=5e^{3i}, z_3=1{,}5\left(cos\frac{1}{2}+isin\frac{1}{2}\right)$;

4) $z_1=-1+i\sqrt{7}, z_2=e^{2i}, z_3=2{,}3(cos\frac{3\varphi}{2}+isin\frac{3\varphi}{2})$;

5) $z_1=\sqrt{7}-i, z_2=3e^{-4i}, z_3=3{,}2(cos4+isin4)$;

6) $z_1=\sqrt{3}+2i, z_2=12e^{-7i}, z_3=6{,}2(cos5-isin5)$;

7) $z_1=5-i\sqrt{2}, z_2=7e^{-2i}, z_3=2{,}4(cos3+isin3)$;

8) $z_1=-\sqrt{3}+2i, z_2=2e^{3i}, z_3=1{,}7(cos5+isin5)$;

9) $z_1=\sqrt{3}-7i, z_2=4e^{-6i}, z_3=7{,}4(cos7+isin7)$;

10) $z_1=\sqrt{7}+3i, z_2=5e^{-7i}, z_3=0{,}5(cos1+isin1)$.

11) $z_1=-2-i\sqrt{3}, z_2=-3e^{5i}, z_3=cos3\varphi+isin3\varphi$;

12) $z_1=-4+i\sqrt{2}, z_2=-2e^{-3i}, z_3=0{,}2(cos2+isin2)$;

13) $z_1=2-i\sqrt{3}, z_2=5e^{-3i}, z_3=1{,}5\left(cos\frac{1}{3}-isin\frac{1}{3}\right)$;

14) $z_1=1-i\sqrt{7}, z_2=3e^{2i}, z_3=2{,}3(cos\frac{3\varphi}{2}-isin\frac{3\varphi}{2})$;

15) $z_1=\sqrt{7}+i, z_2=3e^{4i}, z_3=3{,}2(cos5+isin5)$;

16) $z_1=-\sqrt{3}+2i, z_2=-12e^{7i}, z_3=6{,}2(cos2{,}5-isin2{,}5)$;

17) $z_1=5+i\sqrt{2}, z_2=-7e^{-i}, z_3=2{,}4(cos3\varphi+isin3\varphi)$;

18) $z_1=\sqrt{3}-2i, z_2=2e^{-3i}, z_3=1{,}7(cos1-isin1)$;

19) $z_1=-\sqrt{3}-7i, z_2=-4e^{6i}, z_3=7{,}4(cos7\varphi+isin7\varphi)$;

20) $z_1=-\sqrt{7}-3i, z_2=5e^{5i}, z_3=0{,}5(cos\varphi+isin\varphi)$.

8. Вычислить $\sqrt[3]{z}$ если z задано, изобразить найденные решения на комплексной плоскости.

1) $z=-8$, 2) $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, 3) $z=1$, 4) $z=-1$, 5) $z=8$,

6) $z=1-i\sqrt{3}$, 7) $z=\sqrt{3}+i$, 8) $z=1+i\sqrt{3}$, 9) $z=\sqrt{3}-i$,

10) $z=2-2i$, 11) $z=-5$, 12) $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, 13) $z=-1$, 14) $z=-3$,

15) $z=-9$, 16) $z=1+i\sqrt{3}$, 17) $z=\sqrt{3}-i$, 18) $z=1-i\sqrt{3}$,

19) $z=\sqrt{3}+i$, 20) $z=2+2i$.

9. Решить квадратное уравнение.

1) $x^2 + 5x + 7 = 0$,	2) $x^2 + 4x + 9 = 0$,	3) $x^2 - 3x + 5 = 0$,
4) $x^2 - 4x + 7 = 0$,	5) $x^2 + 4x + 5 = 0$,	6) $x^2 + 2x + 4 = 0$,
7) $x^2 + 3x + 6 = 0$,	8) $x^2 - 3x + 4 = 0$,	9) $x^2 - 2x + 8 = 0$,
10) $x^2 - 5x + 9 = 0$,	11) $x^2 - 5x + 8 = 0$,	12) $x^2 - 4x + 7 = 0$,
13) $x^2 + 3x + 5 = 0$,	14) $x^2 + 4x + 6 = 0$,	15) $x^2 + 4x + 8 = 0$,
16) $x^2 - 2x + 3 = 0$,	17) $x^2 + 3x + 8 = 0$,	18) $x^2 - 3x + 9 = 0$,
19) $x^2 + 2x + 5 = 0$,	20) $x^2 - 2x + 9 = 0$.	

Задание № 2

Найти неопределенные интегралы. Проверить правильность полученных результатов.

1. 1) $\int \frac{xdx}{7+x^2}$; 2) $\int \frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$; 3) $\int (3-x)\cos(x)dx$.

2. 1) $\int \frac{dx}{\sin^2(x/5)}$; 2) $\int \frac{(x+4)dx}{x^2-2x-8}$; 3) $\int x\cdot\ln(1-3x)dx$.

3. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$; 2) $\int \frac{(x+23)dx}{x^2+x-20}$; 3) $\int x\cdot e^{-7x}dx$.

4. 1) $\int \frac{dx}{5x+3}$; 2) $\int \frac{(x+12)dx}{x^2-x-6}$; 3) $\int arctg(4x)dx$.

5. 1) $\int \sin(2-3x)dx$; 2) $\int \frac{(x+19)dx}{x^2-2x-15}$; 3) $\int \sqrt{x^3}\cdot\ln(x)dx$.

6. 1) $\int \exp\left(\frac{x-2}{4}\right)dx$; 2) $\int \frac{(5x+6)dx}{x^2+4x-12}$; 3) $\int x\cdot\sin(5x)dx$.

7. 1) $\int \frac{dx}{7+4x^2}$; 2) $\int \frac{(5x-7)dx}{x^2-x-20}$; 3) $\int (2x+5)\sin(x)dx$.

8. 1) $\int \frac{dx}{\cos^2(2x)}$; 2) $\int \frac{5xdx}{x^2-x-6}$; 3) $\int \frac{\ln(x)dx}{\sqrt{x}}$.

9. 1) $\int \cos\left(\frac{x}{3}-4\right)dx$; 2) $\int \frac{(5x+2)dx}{x^2+2x-8}$; 3) $\int \arcsin(x/3)dx$.

10. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$; 2) $\int \frac{(5x+1)dx}{x^2+2x-15}$; 3) $\int x\cdot e^{3x}dx$.

11. 1) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$; 2) $\int \frac{19-4x}{2x^2+x-3}dx$; 3) $\int (5x-2)\cdot\ln(x)dx$.

12. 1) $\int x\sqrt{3-x^2}dx$; 2) $\int \frac{2x+9}{x^2+5x+6}dx$; 3) $\int x\cdot\cos^2(2x)dx$.

13. 1) $\int \frac{arctg(x)dx}{1+x^2}$; 2) $\int \frac{x+9}{x^2+2x-3}dx$; 3) $\int \ln(3+x^2)dx$.

14. 1) $\int \sin(2x)\cdot\sqrt{2-\cos^2(x)}dx$; 2) $\int \frac{2x+27}{x^2-x-12}dx$; 3) $\int x\cdot\arcsin(x)dx$.

15. 1) $\int \frac{\sin(x)dx}{1-\cos(x)}$; 2) $\int \frac{4x+31}{2x^2+11x+12}dx$; 3) $\int (2-x)\cdot\sin(x)dx$.

16. 1) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x)}dx}{x}$; 2) $\int \frac{11x-2}{x^2+x-2}dx$; 3) $\int (1-\ln(x))dx$.

17. 1) $\int \frac{1-tg(x)}{\cos^2(x)}dx$; 2) $\int \frac{17-2x}{x^2-5x+4}dx$; 3) $\int (3x+4)\cdot\cos(x)dx$.

18. 1) $\int \frac{x^2dx}{8-x^3}$; 2) $\int \frac{9-2x}{x^2-5x+6}dx$; 3) $\int arcctg(4x)dx$.

19. 1) $\int \frac{\sin(2x)dx}{3-\cos^2(x)}$; 2) $\int \frac{4x+27}{2x^2-x-6}dx$; 3) $\int x\cdot\ln^2(x)dx$.

20. 1) $\int \frac{x^2dx}{\cos^2(x^3)}$; 2) $\int \frac{x-13}{x^2-2x-8}dx$; 3) $\int x^2\cdot\sin(3x)dx$.

Задание № 3

Вычислить определенный интеграл.

1. $\int\limits_{2}^{7}\frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$. **2.** $\int\limits_{-3/4}^{0}\frac{3xdx}{\sqrt{(x+1)^3}}$. **3.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}dx}{4-x}$. **4.** $\int\limits_{-8}^{0}\frac{dx}{5-\sqrt[3]{x^2}}$. **5.** $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}-3}$.

6. $\int\limits_{-4}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{(5-x)^3}}$. **7.** $\int\limits_{-3/4}^{0}\frac{dx}{2-\sqrt{1+x}}$. **8.** $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{8+\sqrt[3]{x^2}}$. **9.** $\int\limits_{-1/4}^{0}\frac{dx}{1+\sqrt{3x+1}}$.

10. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{4+\sqrt[3]{x^2}}$. **11.** $\int\limits_{0}^{4}\frac{\sqrt{x}dx}{4+x}$. **12.** $\int\limits_{3}^{6}\frac{\sqrt{x-3}}{x}dx$. **13.** $\int\limits_{0}^{3}\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}dx$.

14. $\int\limits_{2}^{3}\frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}dx$. **15.** $\int\limits_{25}^{49}\frac{\sqrt{x}}{x-6}dx$. **16.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$. **17.** $\int\limits_{-8}^{0}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+3}dx$.

18. $\int\limits_{4}^{9}\frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$. **19.** $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{2+\sqrt[4]{x-1}}$. **20.** $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{5+\sqrt{x}}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования – М.: Издательский центр «Академия», 2011 г.
2. Богомолов Практическое занятие по математике – М. Высшая школа, 2002 г.
3. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. - М.: Наука, 2007.
4. Пехлецкий И.Д. Математика: учебник для средних специальных учебных заведений, - М: Издательский центр «Академия». Мастерство, 2010.
5. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студентов средних профессиональных учреждений – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 352 с.
6. О.Н.Афанасьев, Я.С.Бродский, А.Л.Павлов Математика для техникумов – М, Наука, 1991 г.
7. Щипачев В.С. «Высшая математика», 2001 г.
8. Щипачев В.С. «Сборник задач по высшей математике», 2001 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ
ПРИЛОЖЕНИЕ А

Образец заполнения титульного листа домашней контрольной работы

Государственное профессиональное образовательное учреждение
«Сосногорский технологический техникум»

ОТДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
(ЗАОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ)

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № __
по учебной дисциплине ЕН.01. Математика

08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий
(код специальности и ее наименование)

Курс - ___
Шифр - ___
Вариант - ___

Исполнитель: № группы 14-МН
Обучающийся группы_____
_____
(фамилия, имя, отчество полностью)
_____
Домашний адрес: _____
_____
Дата сдачи контрольной работы
«____»_____20__г.

Преподаватель: _____
Отметка: _____
«____»_____20__г.
Подпись преподавателя _____

г. Сосногорск 20___ год